Thomas Stieltjes à Toulouse : problème des moments et résonances contemporaines.

Gérard Letac*

11 Avril 2006

Abstract

Après avoir évoqué la vie de Thomas Stieltjes (1856-1894), professeur à l'université de Toulouse de 1886 à sa mort, nous examinerons son dernier travail (170 pages publiées aux Annales de la faculté des sciences de Toulouse) et son impact sur les concepts de l'analyse mathématique classique jusqu'à nos jours : théorie de la mesure, du potentiel et des matrices aléatoires.

A la fin des années 50, j'apprenais les mathématiques à l'université de Caen sous la houlette de Roger Apéry (l'homme du $\zeta(3)$ irrationnel) et de Paul Malliavin (du calcul éponyme). Tous deux évoquaient un personnage au nom pas très prononçable à propos de la théorie de l'intégration, Thomas Jan Stieltjes. La bibliothèque de l'université de Caen est superbe et confortable et j'ai vite découvert et lu cet extraordinaire livre qui s'appelle "Correspondance d'Hermite et Stieltjes". Pour les étudiants qui m'écoutent, disons d'abord quelques mots de la vie de Stieltjes, pour vous éviter la peine de chercher sur le web.

Le père de notre Thomas Jan s'appelle aussi Thomas Jan. Il a 7 enfants, une formidable carrière d'ingénieur civil et aura sa statue à Rotterdam. Il pourrait bien avoir été plus célèbre en Hollande que son fils jusqu'à une époque récente. A 17 ans, Thomas Jan junior entre à l'Ecole Polytechnique de Delft. Mais il semble qu'il passe son temps à lire les textes originaux de Gauss et Jacobi (il recommandera toujours d'aller directement aux grands auteurs) à la bibliothèque de l'école plutôt qu'à travailler le programme. Professeurs et élèves le trouvent génial mais il rate le concours de sortie en 1875, redouble et rate encore. Papa est désespéré et le fait entrer à l'observatoire de Leyde comme "aide aux calculs astronomiques". Ceci prouve que ce qu'on fait entre 17 et 22 ans est plus important que tout. Il publie en 1876 un mémoire expliquant comment minimiser $g \mapsto \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ quand g décrit un espace de fonctions de dimension finie (mais c'est peut être son père qui lui fait la surprise de faire publier sans le prévenir ce travail rédigé à l'école d'ingénieurs). Il ne

*Laboratoire de statistique et probabilités, Université Paul Sabatier, Toulouse. Exposé fait dans le cycle Conférences Grand Public de l'UPS. Je remercie Jean-Baptiste Hiriart-Urruty de m'avoir invité et d'avoir suggéré bien des améliorations.

devait pas passer l'intégralité de son temps à additionner des logarithmes car en 1878, il publie une note sur la convolution de Γ'/Γ avec l'indicatrice de $[-1,0]$ (réponse $\log(1/x)$) et en 1890 15 pages sur le reste de l'interpolation de Lagrange. Stieltjes s'ennuie à mourir à calculer les déclinaisons d'étoiles. Mais son père admiré décède en 1878, et Stieljes envisage d'aller travailler avec Sylvester à Baltimore, où on vient de fonder l'université John Hopkins. Mais il se fiance avec Melle Intfeld, qu'il n'épousera qu'en 1883. Je ne peux m'empêcher de la trouver charmante, puisque cette bienfaitrice des mathématiques encourage son mari à abandonner l'astronomie pour se consacrer aux mathématiques à temps plein. Plusieurs petites notes en 1882 sur des points techniques d'analyse réelle : la fonction dérivée n'est pas continue, comportement en 1 d'une série entière de rayon de convergence 1, racines d'un polynôme trigonométrique, et des considérations sur les inégalités de Mac Laurin : si

$$(x+a_1)\cdots(x+a_n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k b_k x^k$$

avec les $a_j>0$ alors $(\log b_k)_{k=0}^n$ est convexe (une suite réelle $(u_k)_{k=0}^n$ est dite convexe si $u_k \leq \frac{1}{2}(u_{k-1}+u_{k+1})$ pour $1\leq k\leq n-1$), deux notes sur la localisation des zéros des polynômes et enfin une étude des nombres premiers p tels que $x^2\equiv 2$ modulo p a une solution (réponse : si et seulement si $p\equiv \pm 1$ modulo 8). Cette dernière note est un prélude à un majestueux mémoire de 65 pages de 1883 sur les solutions de $x^n\equiv a$ modulo p pour $n=3$ ou 4 que Stieltjes devait méditer depuis ses lectures de Gauss à l'école d'ingénieurs.

L'année 1882 est un tournant : il écrit à Hermite pour lui décrire à propos de mécanique céleste quelques résultats sur les fonctions $V_n(\theta)$ sur la sphère $S_3\subset\mathbb{R}^4$ définies par

$$\|e-r\theta\|^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(\theta)r^n$$

où $e\in S_3$ est fixé. En fait $V_n(\theta)=U_n(f(\theta))$ où $U_n(\cos t)=\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$ définit les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce et où f est idoine. Hermite est enthousiaste et transforme la lettre en deux notes aux Comptes rendus à l'Académie des Sciences. Un petit mot d'Hermite : il a été nommé académicien à 36 ans, l'année de la naissance de Stieltjes. Son histoire n'est pas si différente: mauvais élève qui préférait lire Lagrange et Gauss dans le texte, fâché avec la géométrie descriptive, il quitte l'École polytechnique au bout d'un an, la direction ayant trouvé qu'un boîteux ne pouvait faire un bon militaire. L'École le nourrira quand même comme répétiteur, jusqu'à ce qu'il devienne professeur en Sorbonne à 49 ans. Hermite semble avoir été un excellent homme, entretenant une énorme correspondance, lisant et conseillant, recopiant des bouts de livres ou d'articles pour illustrer ses propos. En 1874 il a montré la transcendance de e, manquant de peu celle de π, que montrera Lindemann en 1882 et qui résoudra ainsi le problème millénaire de la quadrature du cercle. Stieltjes donnera une autre démonstration de la transcendance de e en 1890 (en avouant se casser les dents sur celle de π), Gordan, Hilbert et Hurwitz en publieront 3 autres en

1893 dans la même livraison de *Mathematische Annalen* et c'est celle d'Hilbert qui s'expose maintenant dans les lecons d'agrégation. Hermite est connu de nos jours pour ses polynômes, ce qui est bien réducteur compte tenu de ses travaux sur les formes quadratiques à n variables sur les entiers et sa solution de l'équation du 5-ème degré par les fonctions elliptiques. C'est aussi le beau-père d'Emile Picard. On rapporte cette réflexion d'Hermite à son gendre durant un repas de famille : "pendant que vous alliez au congrès écouter les théorèmes des autres, moi j'en démontrais".

Entre Stieltjes et lui, ce sera une longue amitié, illustrée par la correspondance dont j'ai parlé, avec très peu de détails personnels et un enthousiasme de part et d'autre pour les mathématiques. En 1883 les notes aux Comptes Rendus se succèdent : le nombre u_n de diviseurs de n satisfait

$$\lim_n(\log n - \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)) = 1 + 2\Gamma'(1),$$

des notes sur la décomposition d'un entier en sommes de 2,5 ou 7 carrés et aux nombres de classes des formes quadratiques. Ajoutons y une note hollandaise de 1884 qui montre que tout nombre premier $p \equiv 1$ modulo 3 est de la forme $x^2 + 3y^2$, deux textes assez ennuyeux sur l'axe instantané de rotation et le plus court crépuscule et une étude de l'équation de Mathieu $y''(x) + (n^2 + a\cos x)y(x) = 0$.

Mais parmi les notes de 1883 en voici deux qui font dresser l'oreille des analystes, "Sur l'évaluation approchée des intégrales". En termes modernes il prend une mesure positive μ sur $[a, b]$ (non concentrée sur un nombre fini de points), le n ième polynôme orthonormal p_n et ses zéros $x_1 < \ldots < x_n$ (tous réels, comme on l'apprend en licence de mathématiques à l'université Paul Sabatier) et rappelle qu'il existe des constantes $A_k > 0$ telles pour tout polynôme P de degré $< 2n$ on ait

$$\int_a^b P(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^n A_k P(x_k).$$

C'est la formule de quadrature mécanique de Gauss Jacobi, les $A_k = \int_a^b L_k^2(x)\mu(dx)$ sont les nombres de Christoffel lorsque

$$L_k(X) = \frac{\prod_{i\neq k}(X - x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)}$$

définit les polynômes d'interpolation de Lagrange. Stieltjes montre alors que la suite de mesures discrètes $\mu_n = \sum_{k=1}^n A_k\delta_{x_k}$ converge étroitement vers la mesure initiale. Je triche bien sûr : ni l'idée de mesure ni celle de convergence étroite ne sont encore dégagées. Mais toutes les idées d'une présentation moderne de ce résultat sont là. La suite est encore plus intéressante puisqu'elle fait apparaître ce qu'on appelle maintenant la transformée de Stieltjes de μ

$$S(\mu)(z) = \int_a^b \frac{\mu(dx)}{z - x},$$

qui est une fonction analytique dans $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Il l'écrit (j'explique plus bas comment on procède)

$$S(\mu)(z) = \frac{c_0}{z - a_0 - \frac{\lambda_1}{z - a_1 - \frac{\lambda_2}{z - a_2 - \frac{\lambda_3}{\dots}}}}$$

et démontre que les a_j sont dans $[a, b]$ et que les λ_j sont > 0. Les notes sont suivies d'un mémoire de 17 pages aux Annales de l'Ecole Normale qui en développe les démonstrations et une dernière note applique cela aux cas

$$\mu(dx) = (1 + x)^{\pm 1/2}(1 - x)^{\pm 1/2}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)dx.$$

Autre idée qui fera son chemin : une note qui considère ce qu'on appelle maintenant la transformée de Mellin de la mesure positive μ sur $[0, 1]$ à savoir $M(\mu)(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda \mu(dx)$. Stieltjes affirme que si $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ sont donnés et si on considère l'ensemble C des mesures ν sur $[0, 1]$ telles que $M(\mu)(\lambda_j) = M(\nu)(\lambda_j)$ pour tout $j = 1, \dots, n$ alors la mesure ν qui minimise $\nu([0, 1])$ est une mesure concentrée sur au plus $n/2$ points. Aucun rapporteur n'accepterait cela de nos jours : pour tenir debout, l'article devrait montrer que les extrémales de C sont des mesures discrètes avant de jouer sur la forme linéaire $\nu \mapsto \nu([0, 1])$.

En 1883 le ministre n'a pas suivi les recommandations de la faculté de Groningue qui voulait Stieltjes comme professeur (il était placé en seconde ligne derrière Korteweg, qui avait finalement préféré Amsterdam). Un fils (Thomas) est né aux Stieltjes en 1884 et il faut faire quelque chose pour avoir une situation. En 1885, Stieltjes a quitté la Hollande pour Paris : il faisait des cours de mathématiques dans son ancienne école d'ingénieurs à Delft, il a eu un doctorat honoris causa à Leyde en 1884, mais n'a aucun autre diplôme. Sa fille Edith (1885- 1969) nait à Paris. Sévrienne, agrégée, elle enseignera les mathématiques à Montauban et à Toulouse après avoir vu son mari tué au front en 1915. En juin 1886, Stieltjes soutient une thèse à Paris "Etude de quelques séries semi convergentes" (50 pages académiques fruit de son expérience de calculateur, sur les développements asymptotiques) et est nommé professeur à Toulouse en Septembre 1886 grâce à l'efficacité d'Hermite, Tisserand et Picard. Installation au 48 rue Alsace Lorraine, les cours ne sont pas loin : angle des rues Lakanal et Gambetta dans des locaux qui n'existent plus aujourd'hui. Ses lettres à Hermite montrent qu'il est ravi.

Revenons aux travaux de 1885 : on trouve la généralisation de la formule de Lagrange à plusieurs variables : je rappelle que pour une variable, cette fantastique formule affirme que si φ est analytique au voisinage de 0 avec $\varphi(0) = 0$ et que si $y(z) = z\varphi(y(z))$ alors pour toute fonction f analytique en 0 on a

$$f(y(z)) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}(\frac{d}{dy})^{n-1}[f'(y)\varphi(y)^n]_{y=0}.$$

Je mentionne un petit texte concernant l'opérateur linéaire sur les polynômes $y \mapsto L(y) = Ay'' + By'$ quand le polynôme A est à racines réelles distinctes

$$a_1 < \dots < a_n$$

et $\frac{B}{A}(z) = S(\mu)(z)$ est la transformée de Stieltjes (tiens tiens) de

$$\mu = \alpha_1 \delta_{a_1} + \cdots + \alpha_n \delta_{a_n}$$

avec les $\alpha_j > 0$. On y montre qu'il existe $(n+k)!/n!k!$ paires (C, y) de polynômes réels avec $\deg C \leq k$ et $\deg y \leq n$ tels que $L(y) = Cy$.

Toutefois, ce qui fera couler beaucoup d'encre est un couple de notes de 1885 présentées par le brave Hermite : "Sur une fonction uniforme", "Sur une loi asymptotique de la théorie des nombres" où Stieltjes annonce qu'il a démontré la conjecture de Riemann : "Je suis parvenu à mettre cette proposition hors de doute par une démonstration rigoureuse".

Rappelons que la fonction de Riemann définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $s > 1$ se prolonge dans $\mathbb{C}$ par une fonction analytique. Elle est telle que

$$z \mapsto f(z) = \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{z}{2})\pi^{-z/2}\zeta(\frac{1}{2} + z)$$

est une fonction paire. Riemann conjecture que les seuls zéros de f sont sur l'axe imaginaire. L' idée de Stieltjes est d'écrire, si P est l'ensemble des nombres premiers :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in P}(1 - \frac{1}{p^s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

où la suite de Moebius $(\mu(n))_{n=0}^{\infty}$ à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ est définie par $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré et par $\mu(n) = (-1)^m$ quand n est le produit de m nombres premiers. Si on écrit $M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$ la conjecture de Riemann est équivalente à dire que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n)}{n^{\epsilon}\sqrt{n}} = 0$$

En fait, Stieltjes affirme encore plus :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

Stieltjes fait souvent allusion à ça dans ses lettres à Hermite et lui promet de publier les détails. Peut être pour le stimuler Hermite, devenu président de l'Académie des Sciences, organisera en 1890 le concours du meilleur mémoire sur la distribution des nombres premiers, mais Stieltjes n'enverra rien (c'est Hadamard qui aura le prix, avant de développer plus complèment ses idées et de montrer en 1896 la conjecture de Gauss sur les nombres premiers en même temps que Charles de La Vallée-Poussin). Les spécialistes sont sceptiques et pensent que Stieltjes s'est trompé. A sa décharge, il est un des premiers à avoir déterré le mémoire de Riemann (toujours lire les grands hommes) 25 ans après sa parution. Le sujet n'était pas aussi chaud qu'au 21-ième siècle, où un des 7 prix Clay d'un million de dollars attend celui qui résoudra le problème, pour ne rien dire des systèmes de sécurité de nos cartes de crédit qui peuvent en dépendre.

Voici des textes de 1886 moins contestés : le développement asymptotique au voisinage de ∞ de

$$e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-(x+u)^2/2}du$$

et un mémoire d'algèbre linéaire qui me ravit : soit A une matrice symétrique dont tous les coefficients sont ≥ 0 et telle que $I_n - A$ est définie positive . Alors $(I_n - A)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (allez voir sur le web l'exercice II 9.11 du cours d'algèbre linéaire de l'orateur). Stieltjes en donne une amusante application en théorie du potentiel : on met des masses magnétiques positives α et β en ± 1 et les masses 1 sur les $-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1$ qui se repoussent en raison inverse de leurs distances et en raison de leur masse. L'équilibre est atteint au point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où le log du potentiel

$$\log V(x) = \alpha \sum_i \log|x_i + 1| + \beta \sum_i \log|x_i - 1| + \sum_{i<j} \log|x_i - x_j|$$

est maximum. Et Stieltjes en déduit $\frac{\partial}{\partial\alpha}x_j(\alpha, \beta) > 0$, puis $\frac{d}{d\alpha}x_j(\alpha, \alpha) > 0$. Il n'échappe pas à l'auditeur que $x_1 \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}\log V$ est la transformée de Stieltjes de

$$\mu = \alpha\delta_{-1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n} + \beta\delta_1.$$

Evoquons maintenant ce que sera la vie de Stieljes entre 1886 et 1894. La faculté des Sciences de Toulouse, avant 1900, toutes disciplines confondues a moins de 100 étudiants inscrits par an. Mais les professeurs sont en charge du baccalauréat dans toute l'académie (copies, jurys, oraux) et sont réquisitionnés pour les colles de taupes (pardon : les interrogations en classe de Mathématiques Supérieures). Stieltjes trouve les agrégatifs motivés, bien que peu disposés à sortir du programme. Ceux qui ne visent que la licence n'ont pas l'air très savants, puisque Stieltjes gémit de devoir leur apprendre à calculer des dérivées. Mais Stieltjes, à la différence de Poincaré, laisse le souvenir d'un professeur épatant à Henri Bourget (qui s'occupera de l'édition de la correspondance avec Hermite en 1905) : clarté, rigueur, intense préparation et exemples bien choisis.

La famille Stieltjes a l'intense douleur de perdre Thomas à 4 ans d'une diphtérie, et voit aussi naître Antoine et Madeleine (qui mourut presque centenaire à Strasbourg) après déménagement en 1888 au 4 rue Stieljes (qui relie les rues de Fleurance et Montplaisir, entre Grand Rond, Canal et Allée des Demoiselles). Après cette date, la santé de Stieltjes se dégrade sans espoir : il contracte une tuberculose dont il ne se remettra pas : séjour à Arcachon en 1892, trois mois seul au printemps 1893 à Alger où il s'embête ferme. Raid à Paris en juillet 1893 pour voir Hermite et remercier l'Académie des Sciences de lui avoir décerné un prix. Il termine très péniblement les 170 pages du célèbre mémoire sur les fractions continues. Hermite en 1894 cherche à lui procurer un travail moins fatigant que celui d'enseigner, mais Stieltjes s'éteint le 31 décembre 1894. Vous trouverez sa tombe au cimetière de Terre-Cabade, 828.

Parlons plutôt de choses éternelles. Je passe vite sur des textes plutôt pédagogiques des années 1887, 1889, 1890 peut être inspirés par son nouveau métier de professeur : une série entière pour laquelle le cercle qui est une coupure essentielle (c'est à dire impossible à prolonger analytiquement), produit de Cauchy de deux séries dont seulement une seule est absolument convergente, généralisation de la formule des accroissements finis, probabilité pour qu'une variable aléatoire normale de $\mathbb{R}^n$ tombe dans un cône particulier, l'intégrale de Gauss déduite de la formule de Wallis, redémonstration du développement asymptotique de $\log \Gamma$ et la transcendance de e dont nous avons parlé. Il y a enfin un mémoire aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (qui va devenir son support favori) long de 110 pages "Sur la théorie des nombres" qui commence par 50 pages d'arithmétique de première et seconde année d'université et poursuit avec l'algèbre linéaire sur l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Le tout ressemble à un des cours qu'on mettrait sur le web de nos jours, au style "conteur arabe" de l'époque, bien loin de l'efficace trilogie "définition- théorème- démonstration". Plus intéressant: un mémoire sur l'équation différentielle

$$(P(x))^{-1/2}dx = (P(y))^{-1/2}dy$$

où P est un polynôme du 4- ième degré (précédé de quelques notes sur le même sujet). Mais à partir de 1890 le thème des fractions continues analytiques et son lien avec le problème des moments envahit tout dans la production de Stieltjes.

Pour suivre, le premier concept à dégager est celui de mesure positive sur la droite réelle, géniale création de Stieljes en principe enseignée maintenant en licence. Elle est très simplement fabriquée à l'aide d'une fonction croissante F *arbitraire* sur $\mathbb{R}$. La fonction F pourrait avoir une gentille dérivée continue $f \geq 0$ et d'après Newton satisfaire à

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

mais il est préférable d'imaginer que F est très sauvage, avec des plateaux de constance, des discontinuités, des montées très raides, fractales, que vous expérimentez en montagne. Stieltjes savait très bien qu'une telle généralité rendait mal à l'aise son vieil ami Hermite qui lui avait déjà écrit qu'il se détournait "avec effroi et horreur de cette plaie lamentable de l'analyse que sont les fonctions continues sans dérivées". Comme il n'avait pas très envie qu'Hermite soit rapporteur, il lui écrit "ce métier d'éplucher ces choses délicates n'est pas digne de vous et ne vous convient pas". Stieltjes donne alors à l' intervalle $[a, b]$ la masse $\mu_F([a, b]] = F(b+0)-F(a-0)$, ce qui donne un sens à la masse de réunion d'intervalles. Il définit alors l'intégrale d'une fonction continue $\int_a^b g(x)\mu_F(dx)$. Si g est dérivable, sa définition donne

$$\int_a^b g(x)\mu_F(dx) = g(b)F(b+0) - g(a)F(a-0) - \int_a^b g'(x)F(x)dx$$

qui généralise $\int_a^b g(x)f(x)dx$ quand $F' = f$. Autre exemple : si $F(x) = 0$ si $x < a$ et $F(x) = 1$ si $x > a$ alors $\mu_F(dx) = \delta_a(dx)$ est la "masse de Dirac" qui est définie par

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta_a(dx) = g(a).$$

C'est tellement naturel que Riesz montrera 20 ans plus tard que si $C([a,b])$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ et si $g \mapsto T(g)$ est une fonction réelle linéaire sur $C([a,b])$ telle que $T(g) \geq 0$ pour $g \geq 0$ alors il existe F telle que $T(g) = \int_a^b g(x)\mu_F(dx)$. On trouve dans la littérature mathématique des dizaines d'autres ensembles remarquables qui sont de même paramétrés par l'ensemble des mesures de Stieltjes : fonctions convexes, fonctions définies positives, applications analytiques sur le demi plan supérieur H dans lui même, appelée fonctions de Pick. Comme cela a un certain rapport avec notre sujet je rappelle que ce sont aussi exactement les fonctions $z \mapsto f(z)$ telles qu'il existe une mesure de Stieltjes bornée μ, et deux nombres $a \geq 0$ et b tels que

$$f(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xz+1}{x-z}\mu(dx).$$

Puisque $\frac{xz+1}{x-z} = -x + \frac{1+x^2}{x-z}$ c'est une transformée de Stieltjes à laquelle on a ajouté une affinité.

Ces mesures de Stieltjes sont malheureusement mal maitrisées des étudiants. Ceux ci sont exposés en licence ou maîtrise à des cours d'intégration où, dans le couple $(g, d\mu)$ qui apparaît dans l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mu(dx)$, un poids déraisonnable est mis sur la classe de g tels que I ait du sens pour construire les espaces complets de l'Analyse et où l'espace $\mathbb{R}$ est immédiatement remplacé par un espace mesurable abstrait. La plupart des étudiants en sortent perplexes, en se demandant pourquoi c'est si intéressant de pouvoir intégrer sur $[0,1]$ l'indicatrice des rationnels, sans savoir ce qu'est une mesure de Cantor ou une masse de Dirac, et sans avoir compris la quasi bijection entre mesures sur $\mathbb{R}$ et fonctions croissantes (ou plutôt "non décroissante" comme disent les anglos-saxons et comme le disait déjà Stieltjes).

Le second point à décrire est le problème des moments : étant donnée une suite de réels $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ existe - t-il une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout n on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx) = m_n? \tag{1}$$

Exemple $\mu(dx) = e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$ entraîne $m_n = n!$. Tchebychev dès 1855 et Heine dès 1861 ont fait des travaux minutieux dans ce domaine dans le cas particulier $\mu(dx) = f(x)dx$. Il s'agit de savoir comment trouver le ou les μ. Car

μ peut ne pas être unique : observez avec Stieltjes que pour tout n :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^{1/4}}(\sin x^{1/4})x^n dx &= \Im \int_0^\infty e^{-x^{1/4}(1-i)}x^n dx \\ &= 3\Im \int_0^\infty e^{-u(1-i)}u^{4n+3}du \\ &= \frac{3}{(4n+3)!}\Im \frac{1}{(1-i)^{4n+4}} = 0.\end{aligned}$$

Conséquence si $f_0 > 0$ décroit assez lentement pour que

$$f_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda e^{-x^{1/4}}(\sin x^{1/4})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

soit positif pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, voilà que toutes les mesures $\mu_\lambda(dx) = f_\lambda(x)dx$ ont les mêmes moments, ce qui embarrasse bien le statisticien dont les moments sont le gagne pain. On peut montrer (Carleman) que quand $\sum_{n=1}^\infty m_{2n}^{-1/2n} = \infty$ alors il y a au plus un seul μ qui satisfait 1 (mais l'inverse n'est pas vrai).

Remarquons tout de suite le lien entre transformée de Stieltjes $S(\mu)(z)$ et la série formelle $\sum_{n=0}^\infty m_n X^n$: on a envie d'écrire

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mu(dx)}{z-x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{m_n}{z^{n+1}}$$

mais cela n'aura lieu en général qu'au sens des développements asymptotiques: pour tout $n \geq 1$, pour tout $a \in (0, \pi/2)$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$ et $a \leq \arg z \leq \pi - a$ implique que

$$\left| \int_{-\infty}^\infty \frac{\mu(dx)}{z-x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_k}{z^{k+1}} \right| \leq \frac{\epsilon}{|z|^n}. \tag{2}$$

Convenez en effet qu'écrire

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{z-x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{z^{n+1}}$$

avec une série jamais convergente au second membre, serait assez choquant.

Il faut préciser que Stieltjes traitera le problème des moments avec l'hypothèse supplémentaire que les μ sont concentrées sur $[0, \infty)$ ce qui le conduit assez facilement à écrire que la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une mesure positive μ satisfaisant 1 est que les matrices "de Hänkel"

$$A_n = (m_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}, \quad B_n = (m_{i+j+1})_{0 \leq i,j \leq n}$$

soient semi-définies positives quel que soit n. C'est Hamburger qui continuera le travail pour $\mathbb{R}$ en 1920. Parmi d'autres choses dont il est question plus loin, il montre que pour une même suite $(m_n)_{n=0}^\infty$ il peut y avoir une seule solution au problème de Stieltjes et plusieurs au problème d'Hamburger. Il montre que la seule semi-définie positivité des matrices A_n est la condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions si on ne se restreint pas à $[0, \infty)$.

Le troisième point, les fractions continues analytiques, est plus compliqué et ignoré dans la formation actuelle d'un agrégé par exemple. Si $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ et $b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ sont des suites de complexes, notons $Ta = (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ et considérons les suites $(p_n(a,b))_{n=0}^{\infty}$ et $(q_n(a,b))_{n=0}^{\infty}$ définies par $p_0(a,b) = b_0$, $q_0(a,b) = 1$ et

$$p_{n+1}(a,b) = b_0 p_n(Ta, Tb) + a_0 q_n(Ta, Tb),\ q_{n+1}(a,b) = p_n(Ta, Tb).$$

On baptise *réduite d'ordre* n le nombre

$$\frac{p_n(a,b)}{q_n(a,b)} = b_0 + \frac{a_0}{b_1 + \frac{a_1}{\dots + \frac{a_{n-1}}{b_n}}}$$

en croisant les doigts pour que $p_n(a,b)$ et $q_n(a,b)$ ne soient pas nuls en même temps et on baptise *fraction continue* la limite de la suite des réduites. Remarquez l'analogie avec le couple infernal (suite des sommes partielles d'une série, série). On dit que (a,b) et (a',b') sont équivalents si $p_n(a,b)/q_n(a,b) = p_n(a',b')/q_n(a',b')$ à partir d'un certain rang. C'est très utile, car Euler a montré que si $b_0 = 0$ alors on peut trouver une suite $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que le couple $a' = (1, -\rho_1, -\rho_2, \dots)$ et $b' = (0, 1, 1+\rho_1, 1+\rho_2, \dots)$ soit équivalent à (a,b), avec $q_n(a',b') = 1$ et

$$p_n(a',b') = 1 + \sum_{k=1}^{n} \rho_1\rho_2\dots\rho_k$$

ce qui réduit l'étude de la convergence à celle d'une série. Les fractions continues telles que $a = (1, \dots, 1, \dots)$ et b est formé d'entiers > 0 sont cruciales en théorie des nombres, mais Stieltjes considère les fractions continues analytiques où a et b sont des suites de polynômes affines. Pour moi le prix de beauté va à Gauss qui montre que si $b = (0, 1, \dots, 1, \dots)$ et si la suite a est

$$(1, -z\frac{a(c-b)}{c(c+1)}, -z\frac{(c-a+1)(b+1)}{(c+1)(c+2)}, -z\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3}, -z\frac{(c-a+2)(b+2)}{(c+3)(c+4)}, \dots)$$

alors la limite des réduites est

$$\frac{{}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z)}{{}_2F_1(a, b; c; z)},$$

formule dont les résultats coulent comme le lait et le miel. Stieljes trouvera à lui tout seul (deux publications en 1890 au Quaterly Journal of Mathematics) un grand nombre de développements élégants en fraction continue recensés dans le livre de Wall "Continued fractions" Van Nostrand 1948.

Voyons maintenant comment développer une transformée de Stieltjes $S(\mu)$ en fraction continue analytique. Plus généralement (pas beaucoup plus en fait, voir la description ci-dessus des fonctions de Pick) je me pose le même problème pour une fonction f_0 analytique dans $\Im z > 0$ et à valeurs dans $\Im z < 0$ (c'est le cas des transformées de Stieltjes justement). Je définis $\alpha_0 = \lim_{t\to+\infty} f_0(it)$ et $\beta_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{f_0(it)-\alpha_0}{it}$ et ensuite la fonction f_1 :

$$f_1(z) = \frac{\beta_0}{\alpha_0 - f_0(z)} + z,\ f_0(z) = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{z - f_1(z)}$$

qui elle aussi satisfait $\Im f_1(z) < 0$ pour $\Im z > 0$. Je fabrique de même (α_1, β_1, f_2) à partir de f_1 et ainsi de suite. La fraction continue analytique associée à f est donc donnée par

$$a = (\beta_0, -\beta_1, \beta_2, -\beta_3, \ldots),\ b = (\alpha_0, z - \alpha_1, z - \alpha_2, \ldots).$$

Si $f = S(\mu)$ alors les β_n sont ≥ 0 et la réduite d'ordre n de la fraction continue ci dessus a pour dénominateur le n ième polynôme orthogonal p_n pour μ. Cette réduite est une $S(\mu_n)$ où μ_n est une vieille amie de Stieltjes : la mesure concentrée sur les zéros de p_n dont les $2n$ premiers moments coïncident avec ceux de μ. Je n'ai pas le temps de vous décrire comment Stieltjes, Hamburger, Nevanlinna utiliseront ces concepts pour décrire l'ensemble des μ qui satisfont 2. Le meilleur livre en anglais sur le sujet n'est plus édité depuis longtemps : c'est N.I. Akhiezer "*The classical moment problem and some related questions in analysis*" Oliver and Boyd, London, and Hafner, New York 1965. Mais celui ci : J.A. Shohat and J.D. Tamarkin "*The problem of moments*" Mathematical Surveys **1**, AMS 1943 est toujours disponible et très agréable à lire.

Il est bien tard pour parler maintenant de la postérité scientifique de Stieltjes et des résonances contemporaines de son oeuvre. Ses oeuvres de théorie des nombres sont un peu oubliées, sauf évidemment l'affirmation de 1885 sur l'hypothèse de Riemann. Quand on prononce aujourd'hui son nom, c'est la plupart du temps à propos des mesures sur la droite réelle : il en serait aussi surpris qu'Hardy, connu surtout des biologistes pour une triviale loi de Hardy-Wright, ou que Penrose, populaire pour l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice. Mais chacun sait que l'article le plus cité d'un mathématicien n'est pas celui dont il est le plus fier.

L'admiration des mathématiciens du 20-ième siècle ne lui a pas manqué : le problème de moments a eu une grande postérité : je citerai seulement les écrits de Christian Berg de Copenhague pour les généralisations à plusieurs dimensions et la synthèse récente de Barry Simon "OPUC on one foot" *Bull. AMS* **42** 431-460 2005. Toutefois, il y a quelque chose de spécifique à Stieltjes, c'est que son domaine de prédilection est l'analyse à une variable, qui débouche sur l'analyse complexe beaucoup plus naturellement que les extensions multivariées. Il y a 50 ans, la transformée de Stieltjes $S(\mu)$ était considérée comme une curiosité qui certes caractérise la mesure mais qui serait tout de même moins maniable que la transformée de Fourier. La revanche est venue récemment avec les problèmes posés par les grandes matrices M symétriques ou hermitiennes d'ordre N, aléatoires ou non : le meilleur outil pour appréhender la distribution asymptotique μ des valeurs propres $x_1 < \ldots < x_N$ est la transformée de Stieltjes

$$\frac{1}{N}\mathrm{trace}(zI_N - M)^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{z - x_k} \sim S(\mu)(z) :$$

Voyez la conférence de Philippe Biane sur le web à Berkeley en 1999 si vous voulez comprendre. L'invention par Voiculescu de la convolution libre a fait de la transformée de Stieltjes un outil indispensable à l'étude des grandes matrices aléatoires, et chaque chercheur se constitue à l'aide des vieux livres son stock des $S(\mu)$ que l'on rencontre dans la nature.

L'orateur se trouve des liens avec Stieltjes : un Toulousain d'adoption, un adorateur des calculs concrets, un amateur de calcul des probabilités, un professeur passionné par sa tâche, de l'algèbre linéaire astucieuse à l'occasion. Quel être sympathique. Ces quelques jours passés avec lui pour préparer cette conférence me donnent l'impression d'avoir rencontré un ami.