UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2006/2007

L1 - SDI - FEUILLE 1
EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Exercice 1 1. *Les solutions de l'équation homogène* $y' + y = 0$ *sont* $f(x) = c.e^{-x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$. *Une solution particulière de l'équation* $y' + y = 7/2$ *est* $f_0(x) = 7/2$. *Donc les solutions de l'équation* $y' + y = 7/2$ *sont* $f(x) = 7/2 + c.e^{-x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$.

2. *Les solutions de l'équation homogène* $-y' + 2y = 0$ *sont* $f(x) = c.e^{2x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$. *Une solution particulière de l'équation* $-y' + 2y = xe^{-x}$ *est* $f_0(x) = 1/3(1/3 + x)e^{-x}$. *Donc les solutions de l'équation* $-y' + 2y = xe^{-x}$ *sont* $f(x) = 1/3(1/3 + x)e^{-x} + c.e^{2x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 1. *Les solutions de l'équation homogène* $7y' - 14y = 0$ *sont* $f(x) = c.e^{2x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$. *Une solution particulière de l'équation* $7y' - 14y = x^2e^{2x}$ *est* $f_0(x) = \frac{1}{21}x^3e^{2x}$. *Donc les solutions de l'équation* $7y' - 14y = x^2e^{2x}$ *sont* $f(x) = \frac{1}{21}x^3e^{2x} + c.e^{2x}$, *où* $c \in \mathbb{R}$.

2. *La solution telle que* $f(0) = 0$ *est* $f(x) = \frac{1}{21}x^3e^{2x}$.

Exercice 3 1. *L'équation* $y' = (1+x^2)y$ *s'écrit aussi* $\frac{d}{dx}(log \mid y \mid) = 1 + x^2 = \frac{d}{dx}(x + x^3)$. *On en déduit que les solutions de l'équation* $y' = (1 + x^2)y$ *sont* $f(x) = ke^{x+x^3}$ *sur* $\mathbb{R}$, *où* $k \in \mathbb{R}$.

2. *Puisque les fonctions* $\frac{x}{1+x^2}$ *et* $\frac{2x^2+1}{1+x^2}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$, *l'équation* $(1 + x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$ *admed des solutions sur* $\mathbb{R}$. *L'équation homogène* $(1 + x^2)y' + xy = 0$ *s'écrit aussi* $\frac{d}{dx}(log \mid y \mid) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(log(1 + x^2))$. *On en déduit que les solutions de l'équation homog{ene sont* $f(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$, *où* $k \in \mathbb{R}$. *La fonction* $f_0(x) = x$ *est une solution particulière de l'équation* $(1 + x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$, *donc les solutions de l'équation* $(1 + x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$ *sont* $f(x) = x + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$, *où* $k \in \mathbb{R}$.

3. *L'équation* $y' - ytgx = \frac{1}{1+cosx}$ *admed des solutions sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *où* tgx *et* $\frac{1}{1+cosx}$ *sont continues. L'équation homogène associée* $y' - ytgx = 0$ *admed pour solution* $f(x) = \frac{k}{cosx}$, *où* $k \in \mathbb{R}$. *On cherche une solution particulière de l'équation* $y' - ytgx = \frac{1}{1+cosx}$ *sous la forme* $f_0(x) = \frac{u(x)}{cosx}$, *où* u *est une fonction* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. u *vérifie* $u'(x) = \frac{cosx}{1+cosx} = 1 - \frac{1}{2cos^2(x/2)}$. *La fonction* $u(x) = x - tg(x/2)$ *est solution de cette équation. Donc une solution particulière est* $f_0(x) = \frac{x-tg(x/2)}{cosx}$. *Les solutions sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sont donc* $f(x) = \frac{k+x-tg(x/2)}{cosx}$, *où* $k \in \mathbb{R}$.

4. *L'équation $y' - ylogx = x^x$ admed des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation homogène associée $y' - ylogx = 0$ admed pour solution $f(x) = kx^x e^{-x}$, où $k \in \mathbb{R}$. On vérifie que la fonction x^x est une solution particulière de l'équation $y' - ylogx = x^x$. Donc les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $f(x) = x^x(ke^{-x} + 1)$, où $k \in \mathbb{R}$.*

Exercice 4 *Ceux sont toutes des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.*

1. *L'équation caractéristique associée est : $r^2 + r - 2 = 0$. Ses racines sont 1 et -2. Donc l'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x}$. On cherche une solution particulière de l'équation $y'' + y' - 2y = 8sin(2x)$, sous la forme $f_0(x) = asin(2x) + bcos(2x)$. On obtient $a = -6/5$ et $b = -2/5$. Donc la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 8sin(2x)$ est $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x} - 6/5sin(2x) - 2/5cos(2x)$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$.*
2. *L'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x}$ (comme précédemment). On cherche une solution particulière de l'équation $y'' + y' - 2y = x^3 - 7x^2$, sous la forme d'un polynôme de degré au plus 3. On obtient $f_0(x) = -1/2x^3 + 11/4x^2 + 5/4x + 27/8$. Donc la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = x^3 - 7x^2$ est $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x} - 1/2x^3 + 11/4x^2 + 5/4x + 27/8$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$.*
3. *L'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-2x}$ (comme précédemment). On cherche une solution particulière de l'équation $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$, sous la forme $(ax^2 + bx)e^{-2x}$. On obtient $f_0(x) = (-1/6x^2 - 1/9x)e^{-2x}$. Donc la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$ est $f(x) = \alpha e^x + (-1/6x^2 - 1/9x + \beta)e^{-2x}$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$.*
4. *L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$. Ses racines sont $1 + i$ et $1 - i$. Donc l'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = e^x(\alpha cosx + \beta sinx)$. On cherche une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xcos(x) = \frac{x}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Elle sera sous la forme $f_1 + f_2$, où f_1 est une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{x}{2}e^{ix}$ et f_2 est une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{x}{2}e^{-ix}$. On cherche f_1 sous la forme $(a_1 x + b_1)e^{ix}$, où a_1 et $b_1 \in \mathbb{C}$. On obtient $f_1(x) = (\frac{1+2i}{10}x + \frac{1+7i}{25})e^{ix}$. De même, $f_2(x) = \overline{f_1(x)} = (\frac{1-2i}{10}x + \frac{1-7i}{25})e^{-ix}$. Il en résulte qu'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xcos(x)$ est de la forme $(\frac{1+2i}{10}x + \frac{1+7i}{25})e^{ix} + (\frac{1-2i}{10}x + \frac{1-7i}{25})e^{-ix} = \frac{1}{25}((5x+2)cosx - (10x+14)sinx)$ et que la solution générale de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xcos(x)$ est $f(x) = (\alpha cosx + \beta sinx)e^x + \frac{1}{25}((5x+2)cosx - (10x+14)sinx)$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$.*
5. *L'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = e^x(\alpha cosx + \beta sinx)$ (comme précédemment). On cherche une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^x sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x})$, sous la forme $f_0(x) = (acosx + bsinx)xe^x$. On obtient $a = -1/2$ et $b = 0$. Il en résulte que la solution générale de l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^x sin(x)$ est $f(x) = (\alpha cosx + \beta sinx - \frac{x}{2}cosx)e^x$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$.*
6. *L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0$. Elle admed une racine double 2. Donc l'équation homogène associée admed pour solution générale $f(x) = e^{2x}(\alpha + \beta x)$.*

On cherche une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$ *sous la forme* $f_0(x) = (ax+b)e^x$. *On trouve* $a = 2$ *et* $b = 0$. *Il en résulte que la solution générale de l'équation* $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$ *est* $f(x) = (\alpha + \beta x)e^{2x} + 2xe^x$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

7. *L'équation caractéristique associée est :* $r^2 - 4r + 13 = 0$. *Ses racines sont* $2+3i$ *et* $2-3i$. *Donc l'équation homogène associée admed pour solution générale* $f(x) = e^{2x}(\alpha cos3x + \beta sin3x)$. *On cherche une solution particulière de l'équation* $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}cos(3x)$. *Elle sera sous la forme* $e^{-2x}(acos3x + bsin3x)$. *On trouve* $a = 1/52$ *et* $b = -3/104$. *On en déduit que la solution générale de l'équation* $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}cos(3x)$ *est* $f(x) = (\alpha cos3x + \beta sin3x)e^{2x} + \frac{1}{104}(2cos3x - 3sin3x)e^{-2x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
8. *Posons* $z = y' + y$. y *est solution de l'équation* $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ *si et seulement si* z *est solution de l'équation* $z'' + 2z' + z = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$. *La solution générale de l'équation homogène* $z'' + 2z' + z = 0$ *est* $z = (\alpha x + \beta)e^{-x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *On cherche une solution particulière de l'équation* $z'' + 2z' + z = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ *sous la forme* $z_0(x) = (a_0x^4 + b_0x^3 + c_0x^2)e^{-x}$. *On trouve* $a_0 = a/12$, $b_0 = b/6$ *et* $c_0 = c/2$. *On en déduit que la solution générale de l'équation* $z'' + 2z' + z = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ *est* $z(x) = (a/12x^4 + b/6x^3 + c/2x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Il en résulte que* y *est solution de l'équation différentielle* $y' + y = (a/12x^4 + b/6x^3 + c/2x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$. *La solution générale de* $y' + y = 0$ *est* $f(x) = \gamma e^{-x}$. *Une solution particulière de* $y' + y = (a/12x^4 + b/6x^3 + c/2x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$ *est* $f_0(x) = (a/60x^5 + b/24x^4 + c/6x^3 + \alpha/2x^2 + \beta x)e^{-x}$. *Donc la solution générale de l'équation* $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ *est* $(a/60x^5 + b/24x^4 + c/6x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$, *où* α, β *et* $\gamma \in \mathbb{R}$.
9. *Posons* $z = y'' - y$. y *est solution de l'équation* $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ *si et seulement si* z *est solution de l'équation* $z'' - z = 0$. *La solution générale de l'équation homogène* $z'' - z = 0$ *est* $z = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Il en résulte que* y *est solution de l'équation différentielle* $y'' - y = \alpha e^x + \beta e^{-x}$. *Une solution particulière de cette équation est* $f_0(x) = \frac{\alpha}{2}xe^x - \frac{\beta}{2}xe^{-x}$. *On en déduit que la solution générale de* $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ *est* $f(x) = (\alpha x + \lambda)e^x + (\beta x + \mu)e^{-x}$, *où* α, β, λ *et* $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 1. *L'équation caractéristique associée est :* $r^2 - 2r + 1 = 0$. *Elle admed une racine double* 1. *Donc l'équation homogène associée admed pour solution générale* $f(x) = e^x(\alpha + \beta x)$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

2. (a) $P(x)$ *désigne un polynôme.* $P(x)e^x$ *est une solution de* (E) *si et seulement si* $e^x(P(x) + 2P'(x) + P''(x)) - 2e^x(P(x) + P'(x)) + e^xP(x) = (x^2+1)e^x$. *Et ceci est équivalent à dire que* $P''(x) = (x^2 + 1)$. *Cette équation a pour solution particulière* $P(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}$.

   (b) *Une solution particulière de l'équation* (E) *est* $(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2})e^x$. *Il en résulte que la solution générale de l'équation* (E) *est* $f(x) = (\alpha + \beta x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12})e^x$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

   (c) *La solution de* (E) *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$ *est* $f(x) = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12})e^x$.

Exercice 6 1. *La solution générale de l'équation homogène associée est* $\alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Une solution particulière de* (1) *est* $-xe^{-2x}$. *Donc la solution générale de l'équation* (1) *est* $f(x) = \alpha e^{2x} + (\beta - x)e^{-2x}$, *où* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

2. *La condition* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *est équivalente à* $\alpha = 0$. *Et la condition* $f'(0) = 1$ *est équivalente à* $2\alpha - 2\beta - 1 = 1$. *Donc la solution* f *de* (1) *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $f'(0) = 1$ *est définie par* $f(x) = -(1+x)e^{-2x}$ *sur* $\mathbb{R}$.

3. *On a* $f'(x) = (2x+1)e^{-2x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. f *a un minimum en* $-\frac{1}{2}$, *égal à* $-\frac{e}{2}$.

4. $A = (0,-1)$ *et* $B = (-1,0)$. *L'aire du domaine limité par les axes* Ox, Oy *et l'arc* $\overset{\frown}{AB}$ *de la courbe* (C) *est* $\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2x}dx = \frac{e^2-3}{4}$.

Exercice 7 *La condition* (1) *est équivalente à*

$$f'(x) = f(2-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Supposons qu'il existe une telle fonction f. *On a alors* $f''(x) = -f'(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *et donc* $f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Toute fonction qui vérifie (1) *est donc solution de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$. *Donc* f *est de la forme* $f(x) = \alpha cos x + \beta sin x$, *avec* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, soit une fonction de la forme $f(x) = \alpha cos x + \beta sin x$, *avec* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Alors* $f'(x) = -\alpha sin x + \beta cos x$ *et* $f(2-x) = \alpha cos(2-x) + \beta sin(2-x)$. *Donc* f *vérifie* (1) *si et seulement si*

$$(2) \quad cos x(\beta - \alpha cos 2 - \beta sin 2) + sin x(-\alpha - \alpha sin 2 + \beta cos 2) = 0, \ \ sur\ \mathbb{R}.$$

Les fonctions $x \mapsto cos x$ *et* $x \mapsto sin x$ *étant linéairement indépendantes sur* $\mathbb{R}$, *la condition* (2) *est vérifiée si et seulement si* α *et* β *sont solutions du système suivant*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \alpha cos 2 + \beta(sin 2 - 1) = 0 \\ \alpha(sin 2 + 1) - \beta cos 2 = 0 \end{cases}$$

(Σ) *est un système homogène dont le déterminant associé est nul.* (Σ) *a donc des solutions non nulles* $\alpha = \lambda(sin 2 - 1)$ *et* $\beta = -\lambda cos 2$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.
On en déduit que les fonctions f *qui vérifient* (1) *sont les fonctions* $f(x) = \lambda(sin(2-x) - cos x)$ *sur* $\mathbb{R}$.