UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2006/2007

L1 - SDI - FEUILLE 1
EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Exercice 1 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y' + y = 7/2$,
2. $-y' + 2y = xe^{-x}$.

Exercice 2 *Soit l'équation différentielle* $7y' - 14y = x^2e^{2x}$.

1. *La résoudre.*
2. *Trouver la solution* f *telle que* $f(0) = 0$.

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y' = (1 + x^2)y$, *sur* $\mathbb{R}$,
2. $(1 + x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$, *sur* $\mathbb{R}$,
3. $y' - ytgx = \frac{1}{1+cosx}$, *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *et* 4. $y' - ylogx = x^x$, *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + y' - 2y = 8sin(2x)$, 2. $y'' + y' - 2y = x^3 - 7x^2$, 3. $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$,
4. $y'' - 2y' + 2y = xcos(x)$, 5. $y'' - 2y' + 2y = e^x sin(x)$,
6. $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x$,
7. $y'' - 4y' + 13y = e^{-2x}cos(3x)$,
8. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ *(on peut poser* $z = y' + y$*),*
9. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ *(on peut poser* $z = y'' - y$*).*

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle*

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

1. *Résoudre l'équation différentielle* $y'' - 2y' + y = 0$.
2. (a) $P(x)$ *désigne un polynôme. Démontrer que* $P(x)e^x$ *est une solution de* (E) *équivaut à dire que* $P''(x) = (x^2 + 1)$.
   (b) *Résoudre l'équation différentielle* (E).
   (c) *Trouver la solution de* (E) *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.

Exercice 6 *Soit l'équation différentielle*

$$(1) \quad y'' - 4y = 4e^{-2x}.$$

1. *Résoudre cette équation.*
2. *Déterminer la solution de* (1) *telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $f'(0) = 1$.
3. *Construire la représentation graphique* (C) *de* f *en repère orthonormé.*
4. *Soient* A *et* B *les points d'intersection de* (C) *respectivement avec* Oy *et* Ox. *Calculer l'aire du domaine limité par les axes* Ox, Oy *et l'arc* $\overset{\frown}{AB}$ *de la courbe* (C).

Exercice 7 *Déterminer les fonctions* f *deux fois dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$(1) \quad f'(1 - x) = f(1 + x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$