Université P. Sabatier

SDI, Licence $1^{ère}$ année, Feuille 5

Dérivation de fonctions réciproques- Fonctions élémentaires

Exercice 1 :

Montrer que les fonctions f et g admettent une fonction réciproque que l'on explicitera:

1. $f : [-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

2. $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.

Exercice 2 :

Soit $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -3\sin^2(x) + 5$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera les domaines de définition et de dérivabilité.

2. Calculer $g'(\frac{11}{4})$.

Exercice 3 :

1. On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \arccos(\cos x)$, $g(x) = \cos(\arccos x)$ et $h(x) = \arctan(\tan x)$.

a. Simplifier les expressions de f, g et h

b. Tracer les graphes de ces 3 fonctions.

2. Pour $x \in [-1, 1]$, simplifier les expressions suivantes :

$$\sin(\arccos x), \tan(\arccos x).$$

3. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.

4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = signe(x)\frac{\pi}{2}$. Calculer la limite de cette expression en 0.

Exercice 4 :

Faire l'étude de la fonction définie par $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

Exercice 5 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \frac{1}{\cosh x + a}$, $a \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{2\tanh^2 x - 5\tanh x - 3}$.

Exercice 6 :

1. Montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. Exprimer $\cosh^2 x, \sinh^2 x, \cosh^3 x, \sinh^3 x$ en fonction de $\cosh x$, $\sinh x$, $\cosh(2x)$, $\sinh(2x)$, $\cosh(3x)$ et $\sinh(3x)$.
3. Montrer que $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$ et $\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$.
4. En déduire $\tanh 3x$ en fonction de $\tanh x$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 \operatorname{arg\,cosh} \sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f et calculer f' pour $x > 0$ et pour $x < 0$.
3. En déduire une expression plus simple de f.

Exercice 8 : Mêmes questions que l'exercice 7 pour la fonction définie par

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} - x$$

Université P. Sabatier

SDI, Licence $1^{ère}$ année, Feuille 5

Dérivation de fonctions réciproques- Fonctions élémentaires-Corrigé

Exercice 1 :

1. Le polynôme P défini par $P(x) = x^2 + 6x + 10$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ et est strictement positif sur $\mathbb{R}$. La fonction f est, par conséquent, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée définie par $f'(x) = -\frac{x+3}{(x^2+6x+10)^{\frac{3}{2}}}$, est strictement négative sur $]-3, +\infty[$ et $f'(-3) = 0$. f La fonction f est strictement décroissante sur $[-3, +\infty[$, donc inversible. Sa fonction réciproque f^{-1} est définie et strictement décroissante sur $]0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$. En résolvant l'équation $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}} \\ x \in]-3, +\infty] \end{array}\right.$, c'est à dire $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 6x + (10 - \frac{1}{y^2}) = 0 \\ x \in]-3, +\infty] \end{array}\right.$,

on obtient $\left\{\begin{array}{l} x = -3 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \\ y \in]0, 1] \end{array}\right.$. On obtient donc $f^{-1} :]0, 1] \longrightarrow [-3, +\infty[$ définie par $f^{-1}(y) = -3 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

2. la fonction g est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais, elle est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, définie par $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, est strictement négative sur $]1, +\infty[$ et nulle en 1. La fonction g admet une fonction réciproque définie sur $]2, \frac{5}{2}]$ et dérivable sur $]2, \frac{5}{2}[$. On la détermine en résolvant $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} \\ x \in [1, +\infty[\end{array}\right.$ c'est à dire $\left\{\begin{array}{l} (y-2)x^2 - x + y - 2 = 0 \\ x \in [1, +\infty[\end{array}\right.$

On trouve $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \frac{\sqrt{(2y-3)(5-2y)}}{2(y-2)} \\ y \in]2, \frac{5}{2}] \end{array}\right.$ .On en déduit $g^{-1} :]2, \frac{5}{2}] \longrightarrow [1, +\infty[$ définie par $g^{-1}(y) = 1 + \frac{\sqrt{(2y-3)(5-2y)}}{2(y-2)}$.

Exercice 2 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -6 \sin x \cos x = -3 \sin 2x$. f'

1. $f(x)$ est définie si $\cosh x + a \neq 0$. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ si $a > -1$ et $\mathbb{R} - \{\arg\cosh(-a)\}$ si $a \leq -1$.
2. La fonction tanh est définie sur $\mathbb{R}$. Etudions le signe du polynôme défini par $P(X) = 2X^2 - 5X - 3$. Il a deux racines -1 et 6 et est positif ou nul sur $]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$. Par ailleurs la fonction tanh est à valeurs dans $]-1, 1[$. on conclut que le domaine de définition de g est vide.

Exercice 6 :

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 = 1$.
2. A partir des définitions $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ on obtient, par les formules du binôme, $\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$, $\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$, $\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh(3x) + \frac{3}{4}\cosh x$, $\sinh^3 x = \frac{1}{4}\sinh(3x) - \frac{3}{4}\sinh x$.
3. S'obtiennent directement de 1.
4. $\tanh(3x) = \frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)} = \frac{4(\sinh x)^3+3\sinh x}{4\cosh^3 x - 3x\cosh x}$ d'après 2. . D'où $\tanh(3x) = (\tanh x)(\frac{4\sinh^2 x+3}{4\cosh^2 -3}) = (\tanh x)(\frac{4\frac{\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}+3}{\frac{4}{1-\tanh^2 x}-3})$ en utilisant 3. . On obtient finalement $\tanh(3x) = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1+3\tanh^2 x}$.

Exercice 7 :

1. Puisque $\frac{1+\cosh x}{2} \geq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable en dehors des points x tels que $\frac{1+\cosh x}{2} = 1$, soit sur $\mathbb{R} - 0$. On obtient par le calcul, $f'(x) = \frac{\sinh x}{|\sinh x|}$ pour x non nul, donc $f'(x) = 1$ si $x > 0$ et $f'x) = -1$ si $x < 0$.
3. Il est clair que $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$, $(f(0) = 0)$)ou encore, $f(x) = |\, x \,|$ si $x \in \mathbb{R}$.
remarque : on aurait pu obtenir ce résultat en utilisant l'exercice 6, en particulier la formule donnant $\cosh^2 x$.

Exercice 8 : La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\tanh(x) \in]-1, 1[$ implique $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} > 0$. On obtient, par le calcul, que f' est identiquement nulle, donc f est constante et $f(x) = f(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser que $\arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.