UNIVERSITE PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - FEUILLE 7 et 8 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

Exercice 1.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = x/\sin(x)$ *est* $1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = 1/\cos(x)$ *est* $1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\sin(x)/x)$ *est* $e(1-x^2/6+x^4/45) + o(x^4)$.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \arcsin(\pi\sin(x))$ *est* $\pi x+(\pi^3-\pi)x^3/6 + o(x^3)$.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 1 *au voisinage de* $\pi/4$ *de* $f(x) = \arctan(x))$ *est* $\arctan(\pi/4)+16(x-\pi/4)/(16+\pi^2) + o(x-\pi/4)$.

➪ *Montrer que le DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = argsh(1 + 2x + 3x^2)$ *est* $\log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x^3/3 + o(x^3)$.

Exercice 2. *Montrer que*

$$➪ \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3},$$

$$➪ \quad \lim_{x\to 2_+} (\, 2^x + 3^x - 12)^{\tan(\pi x/4)} = \exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2) + 9\log(3)\right)\right].$$

Exercice 3. ➪ *Donner un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 7 *de* $f(x) = \cos(x)$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 2 *de* $f(x) = \arctan\sqrt{x}$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 2π *de* $f(x) = \cos\sqrt{x^2+5\pi^2}$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log(3e^x + e^{-x})$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log(\log(e+x))$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (ch(x))^{1/x^2}$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 1 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \sqrt{a+\sqrt{b+x}},\ a,b\in\mathbb{R}_+^\star$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 3 *au voisinage de* 1 *de* $f(x) = x^{-2}\log(1+x)$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 7 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\cos(x))$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log(\cos(x))$.

➪ *Donner un DL à l'ordre* 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$.

Exercice 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. *Si* $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1$, *montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-a^2/2}.$$

Exercice 5. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *trois fois dérivable au point* a. *Montrer que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^4}\begin{vmatrix}1 & f(a) & f(a+h)\\ 1 & f(a+h) & f(a+2h)\\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h)\end{vmatrix} = f(a)f^{(3)}(a) - f^{(2)}(a)^2.$$

Exercice 6. *Montrer que*

➪ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = -2.$

➪ $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos^{-2}(x) - 2\tan(x)}{1 + \cos(4x)} = \frac{1}{2}.$

➪ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - (3x+5)^{1/3}}{1 - \tan(\pi x/4)} = 0$

➪ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{argsh(x)} - \mathrm{argch(x)}}{\mathrm{argsh}^2(\mathrm{x}^{-1})} = \frac{1}{2}.$

➪

Quelques solutions de l'exercice 4 :

➪ $f(x) = \arctan\sqrt{x} = \arctan\sqrt{2} + \sqrt{2}(x-2)/12 + 7\sqrt{2}(x-2)^2/9\cdot 32 + o((x-2)^2).$

➪ $f(x) = \log\left(3e^x + e^{-x}\right) = 2\log(2) + x/2 + 3x^2/8 - x^3/8 + o(x^3).$

➪ $f(x) = \log\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right) = \log(3) + 5x/12 - 53x^2/576 + o(x^2).$

➪ $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) = \log(2) - x^2/8 - 3x^4/64 + o(x^4).$

➪ $f(x) = \log\left(\log(e+x)\right) = x/e - x^2/e^2 + 7x^3/6e^3 + o(x^3).$

➪ $f(x) = (\mathrm{ch}(x))^{1/x^2} = \sqrt{e} - \sqrt{e^2}x^2/12 + o(x^2).$

➪ $f(x) = (\cos(x))^{1/x^2} = x/\sqrt{e} - x^2/12\sqrt{e} + o(x^3).$

➪ $f(x) = \sqrt{a + \sqrt{b+x}} = \sqrt{a+\sqrt{b}} + x\left(4\sqrt{b}\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^{-1} + o(x).$

➪ $f(x) = x^{-2}\log(1+x) = \log 2 + (1/2 - 2\log 2)(x-1) + (3\log 2 - 9/8)(x-1)^2 + (43/24 - 4\log 2)(x-1)^3 + o((x-1)^3).$

➪ $f(x) = \exp(\cos(x)) = e\left(1 - x^2/2 + x^4/6 - 31x^6/720\right) + o(x^6).$

➪ $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)} = 1 - x^3/2 + o(x^5).$

UNIVERSITE PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - CORRIGÉ DE LA FEUILLE 7/8.

Exercice 1 : ➪ On a au voisinage de $x = 0$: $\log(cos(x)) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) = \log(1 + U)$ où $U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ et comme $\lim_{x\to 0} U = 0$ on peut écrire $\log(cos(x)) = \log(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} + o(U^3)$. Un calcul rapide donne $U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), U^2 = \frac{x}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6),\ U^3 = -\frac{x^6}{8} + o(x^6)$ soit finalement $\log(cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.
Plus astucieux : en remarquant qu'au voisinage de 0 : $f'(x) = -\tan(x) = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$; en intégrant ce DL on retrouve le résultat précédent.
➪ Comme plus haut f s'écrit sous la forme $\log(1 + U)$ avec $U = \frac{x^2}{1+x}$ qui tends vers 0 avec x : on va donc pouvoir composer les DL. $U = \frac{x^2}{1+x} = x^2(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) = x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$, c'est un DL qui commence à l'ordre 2 : il suffit donc de faire un DL de $\log(1 + U)$ à l'ordre 3 : $\log(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} + o(U^3)$, on remplace et on trouve $f(x) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.
➪ On propose trois solutions.
• On se ramène en 0 en posant $X = x - 2$ soit $f(x) = \arctan\sqrt{x} = \arctan\sqrt{X + 2} = g(X)$. On va donc chercher un $DL_2(0)$ de g : $g(X) = \arctan\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{X}{2}}$ et $\sqrt{1 + \dfrac{X}{2}} = 1 + \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)$ soit $g(X) = \arctan\sqrt{2}(1 + \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)) = \arctan\sqrt{2}(1 + U) = \varphi(U)$ où $U = \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)$.
Maintenant $\varphi'(U) = \frac{\sqrt{2}}{3+4U+2U^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{1+4U/3+2U^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - 4U/3 + o(U))$. On intégre $\varphi(U) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}U}{3} - \frac{4\sqrt{2}U^2}{9} + o(U^2)$ soit $g(X) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}X + \frac{7\sqrt{2}}{9\cdot 32}X^2 + o(X^2)$ et finalement $f(x) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}(x - 2) + \frac{7\sqrt{2}}{9\cdot 32}(x - 2)^2 + o((x - 2)^2)$.
• On peut aussi chercher un $DL_2(2)$ de f' : $f'(x) = (2\sqrt{x}(1 + x))^{-1}$ ($\sqrt{x}^2 = |x| = x$ car x tends vers 2) soit en posant $X = x - 2$: $(2(1 + x))^{-1} = (2\sqrt{X + 2}(3 + X))^{-1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1 + X/2)^{-1}(1 + X/3)^{-1} = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{7\sqrt{2}}{12^2}(x - 2) + o((x - 2))$ et on intègre....
• On peut enfin utiliser Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) + f''(2)(x - 2)^2/2 + o((x - 2)^2)$ et on calcule $f(2), f'(2), f''(2)$ ce qui finalement n'est pas plus long que le reste...

➪ On effectue le changement $h = x - 2\pi$: $\cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2} = \cos\sqrt{(h + 2\pi)^2 + 5\pi^2} = \cos\sqrt{h^2 + 4\pi h + 9\pi}$
$\cos(3\pi\sqrt{1 + \frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2}}) = \cos(3\pi(1 + \frac{1}{2}(\frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2}) - \frac{1}{4}(\frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2})^2 + o(h^2))$

Exercice 3 : ➪ On a $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2(x)} = \frac{(x^3/6+o(x^3))(2x+o(x^2))}{x^2(x+o(x^2))^2}$
$= \frac{(x^3/6+o(x^3))(2x+o(x^2))}{x^2(x^2+o(x^2))} = \frac{(1/6+o(1))(2+o(x))}{1+o(x)} = \frac{1+o(1)}{3+o(x)}$ et la limite est 1/3.

➪ On se ramène à l'origine : $2^x + 3^x - 12 = 4\cdot 2^{x-2} + 9\cdot 3^{x-2} - 12 = 4e^{(x-2)\log 2} + 9e^{(x-3)\log 3} - 12 = 1 + (4\log 2 + 9\log 3)(x - 2) + o(x - 2)$. De même $\tan(\pi x/4) = \tan(\pi(x - 2)/4 + \pi/2) = -\frac{\cos(\pi(x-2)/4)}{\sin(\pi(x-2)/4)} = -\frac{1-\pi^2(x-2)^2/32+o((x-2)^2)}{\pi(x-2)/4\cdot(1-\pi^2(x-2)^2/6\cdot 16+o((x-2)^2)} = -\frac{4}{\pi(x-2)}(1 - \frac{\pi^2}{48}(x - 2)^2 + o((x - 2)^2))$. On a donc :
$(2^x + 3^x - 12)^{\tan(\pi x/4)} = \exp(\tan(\pi x/4)\log(2^x + 3^x - 12)) = \exp(-\frac{4}{\pi(x-2)}(1 - \frac{\pi^2}{48}(x - 2)^2 + o((x - 2)^2)) \times \log(1 + (4\log 2 + 9\log 3)(x - 2) + o(x - 2))) = \exp(-\frac{4}{\pi}(4\log 2 + 9\log 3) + o(1)) \to \exp(-\frac{4}{\pi}(4\log 2 + 9\log 3)$ lorsque $x \to 2$.

Exercice 4 :
➪ $f(x) = \cos(x)$.
➪ $f(x) = \log(\cos(x))$.

➪ $f(x)=\log\left(1+\dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
➪ $f(x)=\arctan\sqrt{x}=\arctan\sqrt{2}+\sqrt{2}(x-2)/12+7\sqrt{2}(x-2)^2/9\cdot 32+o((x-2)^2)$.
➪ $f(x)=\cos\sqrt{x^2+5\pi^2}$.
➪ $f(x)=\log\left(3e^x+e^{-x}\right)=2\log(2)+x/2+3x^2/8-x^3/8+o(x^3)$.
➪ $f(x)=\log\left(1+x+\sqrt{4+x}\right)=\log(3)+5x/12-53x^2/576+o(x^2)$.
➪ $f(x)=\log\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=\log(2)-x^2/8-3x^4/64+o(x^4)$.
➪ $f(x)=\log\left(\log(e+x)\right)=x/e-x^2/e^2+7x^3/6e^3+o(x^3)$.
➪ $f(x)=\left(\mathrm{ch}(x)\right)^{1/x^2}=\sqrt{e}-\sqrt{e^2}x^2/12+o(x^2)$.
➪ $f(x)=\left(\cos(x)\right)^{1/x^2}=x/\sqrt{e}-x^2/12\sqrt{e}+o(x^3)$.
➪ $f(x)=\sqrt{a+\sqrt{b+x}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}+x\left(4\sqrt{b}\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^{-1}+o(x)$.
➪ $f(x)=x^{-2}\log(1+x)=\log 2+(1/2-2\log 2)(x-1)+(3\log 2-9/8)(x-1)^2+(43/24-4\log 2)(x-1)^3+o((x-1)^3)$.
➪ $f(x)=\exp(\cos(x))=e\left(1-x^2/2+x^4/6-31x^6/720\right)+o(x^6)$.
➪ $f(x)=\left(\cos(x)\right)^{\sin(x)}=1-x^3/2+o(x^5)$.

Exercice 5 : Vu les hypothèses sur f, la formule de Taylor-Young nous donne $f(a/\sqrt{x})=1-\dfrac{a^2}{2x}+o(x^{-1})$ et on a donc $f(a/\sqrt{x})^x=[1-\dfrac{a^2}{2x}+o(x^{-1})]^x=\exp[x\log(1-\dfrac{a^2}{2x}+o(x^{-1})]=\exp[-\dfrac{a^2}{2}+o(1)]\to e^{-a^2/2}$ lorsque $x\to+\infty$.

Exercice 6 : Nous avons

$$\Delta_h:=\begin{vmatrix}1 & f(a) & f(a+h)\\ 1 & f(a+h) & f(a+2h)\\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & f(a) & f(a+h)\\ 0 & f(a+h)-f(a) & f(a+2h)-f(a+h)\\ 0 & f(a+2h)-f(a) & f(a+3h)-f(a+h)\end{vmatrix}$$
$$=(f(a+h)-f(a))(f(a+3h)-f(a+h))-(f(a+2h)-f(a+h))(f(a+2h)-f(a)).$$

La formule de Taylor-Young nous donne

$$\begin{aligned}f(a+2h)-f(a+h)=&\big(f(a)+2hf'(a)+4h^2f''(a)/2+8h^3f'''(a)/6+o(h^3)\big)\\ &-\big(f(a)+hf'(a)+h^2f''(a)/2+h^3f'''(a)/6+o(h^3)\big)\end{aligned}$$

soit

$$f(a+2h)-f(a+h)=hf'(a)+3h^2f''(a)/2+7h^3f'''(a)/6+o(h^3).$$

De même

- $f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h^2f''(a)/2+h^3f'''(a)/6+o(h^3)$,
- $f(a+3h)-f(a+h)=hf'(a)+5h^2f''(a)/2+19h^3f'''(a)/6+o(h^3)$,
- $f(a+2h)-f(a)=2hf'(a)+4h^2f''(a)/2+8h^3f'''(a)/6+o(h^3)$.

On calcule le déterminant puis regroupe soigneusement les termes suivant les puissances de h il reste $(f(a)f^{(3)}(a)-f^{(2)}(a)^2))h^4+o(h^4)$ et le résultat suit.