L1 - SDI - CORRIGÉ DE LA FEUILLE 6.

Exercice 1. *Vu les hypothèses sur f, la fonction $g(x) = f(\tan(x))$ définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ se prolonge continuement sur $[-\pi/2, \pi/2]$ en posant $g(\pi/2) = g(-\pi/2) = l := \lim_\infty f(x)$. Ainsi prolongée, g est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ avec $g(\pi/2) = g(-\pi/2) = l$, elle est donc redevable du théorème de Rolle : il existe $d \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $g'(d) = (1 + \tan^2(d))f'(\tan(d)) = 0$ et $c = \tan(d)$ convient.*

Exercice 2. • *Supposons n pair. Alors $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: P' est donc strictement croissant sur $\mathbb{R}$ de degré impair il admet donc un unique zéro sur $\mathbb{R}$ et par le théorème de Rolle P admet au plus deux zéros distincts sur $\mathbb{R}$ (sinon...).*
• *Si n est impair, pour les mêmes raisons P' est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ avec $P'(0) = a$. Il en résulte que P' admet deux racines réelles distinctes $\alpha > 0$ et $-\alpha < 0$ si $a < 0$, une racine réelle 0 si $a = 0$ et pas de racines réelles si $a > 0$. Avec Rolle P n'admet alors au maximum que trois racines réelles distinctes.*

Exercice 3. *Par le théorème de Rolle, entre deux zéros réels d'un polynôme P se trouve toujours un zéro de P'. En outre, toute racine d'ordre k de P est une racine d'ordre $k-1$ de P'. Avec ces deux propriétés on vérifie sans peine que notre polynôme P' admet $d-1$ racines réelles.*

Exercice 4. *P est visiblement sans zéros sur $\mathbb{R}_-$. Sur $\mathbb{R}_+$, comme $P(0) = -5$ et $\lim_{+\infty} P(x) = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une racine positive pour P. Maintenant, si P admet deux racines positives distinctes, le théorème de Rolle assure l'existence d'un zéro $a > 0$ pour P' ce qui est absurde car $P'(a) = 13a^{12} + 21a^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$.*

Exercice 5. *L'étude sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $f(x) = \log(x) - x/e$ assure qu'elle présente un maximum strict en $x = e$ où elle est nulle : l'inégalité en résulte. Pour $x = \pi$ on a donc $\log(\pi) < \pi/e$ soit $e^\pi > \pi^e$.*

Exercice 6. *L'inégalité $\sin(x) \leq x$ ne pose pas de problèmes. Pour la seconde, soit $0 < x < \pi/2$, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction sinus nous assure qu'il existe $0 < \theta < x$ tel que $\sin(x)/x = \cos(\theta)$. De là, comme $f'(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)/x}{x}$, on peut donc aussi écrire $f'(x) = \frac{\cos(x) - \cos(\theta)}{x} < 0$ car $0 < \theta < x < \pi/2$: f est donc strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, comme $f(\pi/2) = 2/\pi$ l'inégalité est démontrée.*

Exercice 7. *Il existe donc $0 < \zeta_0 < x/q < \zeta_1 < x/p$ tels que*

$$\frac{\log(1 + x/q)}{x/q} = \frac{1}{1 + \zeta_0} > \frac{1}{1 + \zeta_1} = \frac{\log(1 + x/q) - \log(1 + x/p)}{x/q - x/p}$$

soit encore $(x/p)\log(1 + x/q) > (x/q)\log(1 + x/p)$ qui donne l'inégalité.

Exercice 8. • *Par le théorème des accroissements finis : $(e^x - 1)/x = e^\zeta > 1$, $\forall\, x > 0$ et $(e^x - 1)/x = e^\zeta < 1$, $\forall\, x < 0$; il en résulte que $e^x < 1 + x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star$, enfin pour $x = 0$ on a égalité.*
• *Soit $n \geq 1$, si $A_n \neq 0$ nous avons pour $x = -1 + a_i/A_n$: $e^{-1+a_i/A_n} \geq a_i/A_n \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En multipliant on trouve $e^{-n+(a_1+\cdots+a_n)/A_n} = e^0 = 1 \geq G_n^n/A_n^n$ soit (la fonction racine n-ième est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$) $A_n \geq G_n$. Si $A_n = 0$ alors $G_n = A_n = 0$. Enfin comme l'inégalité $e^x \geq 1 + x$ est une égalité seulement pour $x = 0$, le raisonnement précédent assure que $A_n = G_n$ ssi $-1 + a_i/A_n = 0$, $1 \leq i \leq n$ i.e. ssi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*

Exercice 9. *Avec la formule de Leibnitz on a $F^{(n)}(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(n-k)}((1-x)^n)^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k n(n-1)\ldots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)}(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(1-x)^{n-k} = n!(-1)^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 x^k (x-1)^{n-k}$. Le coefficient de x^n est donc $n!(-1)^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.*

Exercice 10. *F est clairement continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, en outre, les propriétés du déterminant impliquent que $F(a) = F(b) = 0$: le théorème de Rolle assure alors l'existence de $x_0 \in]a, b[$ tel que $F'(x_0) = 0$. Pour $g(x) = x$, $h(x) = 1$, $x \in [a, b]$, on retrouve le théorème des accroissements finis et sa version généralisée pour $h \equiv 1$.*

Exercice 11. *La formule de Taylor-Young appliquée à f sur $[0, k/n^2]$ donne pour $0 \leq k \leq n$: $f(k/n^2) = \frac{k}{n^2}f'(0) + o(\frac{1}{n})$ (bien remarquer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ assure que le petit « o » est bien un $o(\frac{1}{n})$...). On a donc $\sum_0^n f(k/n^2) = \sum_0^n \frac{k}{n^2}f'(0) + (n+1)o(\frac{1}{n}) = \frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0) + o(1) \to \frac{f'(0)}{2}$.*

Exercice 12. • *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = \frac{4n^2-4}{(2n+1)(2n+2)2n} \geq 0$: la suite $(u_n)_n$ est donc croissante. Elle est aussi majorée car $u_n \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$: elle est donc convergente.*

• *Comme* $f(0)=0$, *la formule de Taylor-Young implique que* $f(\frac{1}{n+k}) = \frac{f'(0)}{n+k} + o(\frac{1}{n})$ *pour tout* $1 \leq k \leq n$. *On somme ces* n *égalités :* $f(\frac{1}{n+1}) + f(\frac{1}{n+2}) + \cdots + f(\frac{1}{2n}) = \frac{f'(0)}{n+1} + o(\frac{1}{n}) + \frac{f'(0)}{n+2} + o(\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{f'(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}) = f'(0)u_n + n \cdot o(\frac{1}{n})$ *qui tends vers* $\lambda f'(0)$ *vu la première question et la définition du « o ».*
• *Pour* $f(x) = \log(1+x)$ *nous aurons* $\lim_n f(\frac{1}{n+1}) + f(\frac{1}{n+2}) + \cdots + f(\frac{1}{2n}) = \log(1+\frac{1}{n+1}) + \log(1+\frac{1}{n+2}) + \cdots + \log(1+\frac{1}{2n}) = \lambda f'(0) = \lambda$. *Mais* $\log(1+\frac{1}{n+1}) + \log(1+\frac{1}{n+2}) + \cdots + \log(1+\frac{1}{2n}) = \log(\frac{n+2}{n+1}) + \log(\frac{n+3}{n+2}) + \cdots + \log(\frac{2n+1}{2n}) = \log(\frac{(n+2)\ldots(2n+1)}{(n+1)\ldots 2n}) = \log(\frac{2n+1}{n+1}) \to \log(2)$ *soit* $\lambda = \log(2)$.

Exercice 13. *Si* f *n'est pas constante, on peut trouver* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(a) \neq 0$ *et la formule de Taylor-Lagrange nous donne*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \zeta_x \in (a,x) \quad : \quad f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2} f''(\zeta_x) \geq f(a) + xf'(a)$$

la dernière inégalité résultant du fait que f *convexe et deux fois dérivable implique* $f'' \geq 0$. *Si par exemple* $f'(a) > 0$ *on obtient alors une contradiction en faisant tendre* x *vers* $+\infty$ *(et vers* $-\infty$ *si* $f'(a) < 0$*...) CQFD. Le résultat subsiste si* f *est seulement convexe mais la preuve est plus délicate.*

Exercice 14. *Avec la formule de Taylor-Young nous avons* $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)/2+o(h^2)-2f(x)+f(x)-hf'(x)+h^2f''(x)/2+o(h^2)}{h^2} = f''(x) + \frac{o(h^2)}{h^2} \to f''(x)$ *lorsque* h *tends vers* 0. *La procédure est la même pour la seconde limite.*

Exercice 15. • *Taylor-Lagrange appliquée a* $x \mapsto e^x$ *à l'ordre* n *donne pour* $x > 0$ *:* $e^x = \sum_0^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_x} > \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$ *où* $0 < \theta_x < x$.
• *De même pour* $x > 0$ *:* $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\theta_x)^5} > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ *et* $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\varphi_x)^4} < \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
• *C'est du même tonneau (appliquer Taylor-Lagrange à* $x \mapsto \sqrt{1+x}$*).*