UNIVERSITE PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - FEUILLE 6 : DÉRIVATION 2.

Exercice 1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application dérivable. Si* $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x)$, *montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(c) = 0$ *(appliquer Rolle à* $g(x) = f(\tan(x))$*...).*

Exercice 2. *Soient* $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $P(x) = x^n + ax + b$. *Montrer que si* n *est pair* P *a au plus deux racines réelles distinctes, et au plus trois si* n *est impair.*

Exercice 3. *Montrer que si toutes les racines d'un polynôme* P *de degré* $d \geq 2$ *sont réelles, alors il en est de même pour les racines de* P'.

Exercice 4. *Montrer que le polynôme* $P(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$ *admet une unique racine réelle.*

Exercice 5. *Montrer que* $\log(x) < x/e, \ \forall x > 0, \ x \neq e$. *Lequel des deux réels* e^π *et* π^e *est le plus grand ?*

Exercice 6. *Montrer que*

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \forall x \in [0, \pi/2],$$

et représenter graphiquement cette inégalité (pour la première inégalité on pourra par exemple montrer que pour tout $0 < x < \pi/2$, *il existe* $0 < \theta < x$ *tel que* $\sin(x)/x = \cos(\theta)$ *pour en déduire que la fonction* $f(x) = \sin(x)/x, \ x \in]0, \pi/2], \ f(0) = 1$ *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$*...).*

Exercice 7. *En appliquant le théorème des accroissements finis à* $x \mapsto \log(1 + x)$ *sur les segments* $[0, x/q]$ *et* $[x/q, x/p]$, *montrer que pour* $0 < p < q$:

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 8. *Montrer que* $e^x \geq 1+x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. *En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ a_1, a_2 \ldots, a_n \geq 0,$$

et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x = -1 + a_i/A_n, \ 1 \leq i \leq n$*...).*

Exercice 9. *Calculer la dérivée* n*-ième de* $x \mapsto x^n(1 - x)^n$. *Quel est le coefficient de* x^{2n} *? En déduire que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{(2n)!}{n!^2}$.

Exercice 10. *Soient* f, g, h *trois fonctions continues sur* $[a, b]$ *et dérivables sur* $]a, b[$. *Soit*

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $F'(x_0) = 0$. *Que retrouvez vous si* $g(x) = x$ *et* $h(x) = 1$ *?*

Exercice 11. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0) = 0$, *montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 12. *On veut calculer* $\displaystyle\lambda := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) *Justifier l'existence de* λ.

(2) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0) = 0$ *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = \lambda f'(0).$$

(3) *En considérant* $f(x) = \log(1+x)$*, montrer que* $\lambda = \log(2)$.

Exercice 13. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathscr{C}^2$ *convexe* ($f'' \geq 0$) *et majorée. On se propose de montrer que* f *est constante ; pour cela, si* f *est pas constante montrer qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(a) \neq 0$*. Avec Taylor-Lagrange en déduire que* $f(x) \geq f(a)+(x-a)f'(a)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *puis conclure.*

Exercice 14. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Si* f *est deux fois dérivable au point* $x \in \mathbb{R}$*, montrer que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Exercice 15. *Pour* $x > 0$ *montrer que*

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$