UNIVERSITE PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - FEUILLE 10 : Réduction d'endomorphisme

– **Corrigé** –

Exercice 1.

1. Si $v = (x, y) \neq 0$ est vecteur propre de f associé à λ, alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda x \\ x - y & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 2 \\ x & = & 3y \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -1 \\ x & = & 0 \end{array} \right. .$$

Donc les valeurs propres de f sont 2 associée aux vecteurs propres de la forme $(3y, y)$ pour $y \in \mathbb{R}^\star$, et -1 associée aux vecteurs propres de la forme $(0, y)$, pour $y \in \mathbb{R}^\star$.

2. On a 2 valeurs propres distinctes donc f est bien diagonalisable. Sa matrice sera diagonale dans la base donnée par $v_1 = (3, 1)$ et $v_2 = (0, 1)$, sous la forme

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Dans cette base, la matrice de f^n sera donc

$$D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

4. La matrice de changement de la base canonique vers (v_1, v_2) est

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si (e_1, e_2) désigne la base canonique, on a $e_1 = (v_1 - v_2)/3$ et $e_2 = v_2$, d'où

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de f^n dans la base canonique sera

$$PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ (2^n - (-1)^n)/3 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

(Rappelons que si X représente les coordonnées dans la base canonique d'un vecteur et X' celles du même vecteur exprimées dans la nouvelle base, alors $X = PX'$, $X' = P^{-1}X$.)

Exercice 2.

1. $(x, y) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x/2 - y/2 & = & 0 \\ -x/2 + y/2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Vect}\big((1, 1)\big).$
2. Soit $v = (x, y)$.

$$f(v) = v \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x/2 - y/2 & = & x \\ -x/2 + y/2 & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -y.$$

$v = (1, -1)$ convient donc.

3. f admet 2 valeurs propres distinctes 0 et 1. f est donc diagonalisable.
4. f est la projection sur $\text{Vect}(1, -1)$ parallèlement à $\text{Vect}(1, 1)$. De plus $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont perpendiculaires. Donc f est la projection orthogonale sur la deuxième diagonale.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. La matrice de f dans la base canonique est

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

2. $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et M_0 admet une seule valeur propre 1.

   $M_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et M_π admet une seule valeur propre -1.

3. Si $v = (x, y)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\cos(\theta) - \lambda)x & = & \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x & = & (\lambda - \cos(\theta))y \end{array} \right.$$

   Or comme $\theta \neq 0$ ou π, $\sin(\theta) \neq 0$ donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & -\frac{(\cos(\theta)-\lambda)^2}{\sin^2(\theta)} y \\ x & = & -\frac{(\cos(\theta)-\lambda)^2}{\sin^2(\theta)} x \end{array} \right.$$

   Ceci n'est possible que si $x = y = 0$. On a alors une contradiction car v doit être non nul. D'où f n'admet pas de valeur propre.

Exercice 4.

1.
$$f(x, y) = (x + 2y, 3y) = (x, y) \Leftrightarrow y = 0$$

   Donc 1 est valeur propre avec $(1, 0)$ comme vecteur propre associé.

$$f(x, y) = (x + 2y, 3y) = 3(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

   Donc $(1, 1)$ est un vecteur associé à la valeur propre 3.

2. f est un endomorphisme de R^2 admettant 2 valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable, par exemple dans la base formée par $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

3. Dans cette base, la matrice de f^n est donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

   Or M^n est la matrice de f^n dans la base canonique et donc on a

$$M^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

   avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. D'où $M^n = \begin{bmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

Exercice 5.

1. Soit f une homothétie vectorielle de rapport λ et (e_1, e_2) une base de R^2. Par définition de f, on a $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = \lambda e_2$ et donc $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)} f = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ est diagonale. Ainsi f vérifie (P).

2. Si $\alpha_1 e_1 + \alpha_2(e_1 + e_2) = 0$ alors comme (e_1, e_2) est libre, on a $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 = 0$ donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Donc $(e_1, e_1 + e_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ à 2 éléments, donc une base de $\mathbb{R}^2$.

   Or $f(e_1+e_2) = f(e_1)+f(e_2) = ae_1+be_2 = (a-b)e_1+b(e_1+e_2)$ et $Mat_{(e_1,e_1+e_2)} f = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

   Comme f vérifie (P), cette matrice doit être diagonale, donc $a - b = 0$ et $a = b$. Ainsi les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P) sont exactement les homothéties vectorielles.

Exercice 6.

1. La matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

car $f(1,0) = (3,1)$ et $f(0,1) = (1,3)$.

2. $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ (résolution du système f(x,y)=0 ou bien déterminant non-nul). Le théorème du rang nous dit alors que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$ (ou bien f est inversible donc surjective).

3. $\det(f - \lambda \mathrm{id}) = (3-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$ donc les valeurs propres sont 2 et 4. En résolvant les équations $f(x,y) = 2(x,y)$ et $f(x,y) = 4(x,y)$, on trouve que $(1,-1)$ est un vecteur propre associé à 2 et $(1,1)$ est un vecteur propre associé à 4.

4. $A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, d'où

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{bmatrix}.$$

5. $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ donc $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ convient. Si on pose $C = PBP^{-1}$ alors $C^2 = PB^2P^{-1} = A$. Donc $C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$ convient.

6. $A'M = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$ et $MA' = \begin{bmatrix} 2a & 4b \\ 2c & 4d \end{bmatrix}$. Donc M commute avec A' si et seulement si $b = c = 0$ ou encore si et seulement si M est diagonale.
   $A'M = MA' \Leftrightarrow PA'MP^{-1} = PMA'P^{-1} \Leftrightarrow PA'P^{-1}PMP^{-1} = PMP^{-1}PA'P^{-1} \Leftrightarrow A(PMP^{-1}) = (PMP^{-1})A$, donc les matrices qui commutent avec A sont les matrices de la forme PMP^{-1} avec M diagonale i.e. de la forme $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} d+a & d-a \\ d+a & d-a \end{bmatrix}$ où d et a sont 2 réels.

Exercice 7.

1. La matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

3. Les valeurs propres sont 2 et 3, de vecteurs associés $(1,-1)$ et$(1,-2)$ respectivement.

4. $A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, d'où

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{bmatrix}.$$

5. $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ donc $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ convient. Si on pose $C = PBP^{-1}$ alors $C^2 = PB^2P^{-1} = A$. Donc $C = \begin{bmatrix} 2.\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ -2.\sqrt{2} + 2.\sqrt{3} & -\sqrt{2} + 2.\sqrt{3} \end{bmatrix}$ convient.

6. M commute avec A' si et seulement si M est diagonale.
   Les matrices qui commutent avec A sont donc les matrices de la forme PMP^{-1} avec M diagonale i.e. de la forme $\begin{bmatrix} 2.a - d & a - d \\ -2.a + 2.d & -a + 2.d \end{bmatrix}$ où d et a sont 2 réels.

Exercice 8.

1. La matrice de f dans la base canonique est
$$\begin{bmatrix} -11 & 10 \\ -30 & 24 \end{bmatrix}.$$
2. $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ et $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$.
3. Les valeurs propres sont 4 et 9, de vecteurs associés $(2,3)$ et$(1,2)$ respectivement.
4. $A^n = P\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{bmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, d'où
$$A^n = \begin{bmatrix} 4.4^n - 3.9^n & -2.4^n + 2.9^n \\ 6.4^n - 6.9^n & -3.4^n + 4.9^n \end{bmatrix}.$$
5. $A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ donc $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ convient. Si on pose $C = PBP^{-1}$ alors $C^2 = PB^2P^{-1} = A$.
Donc $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$ convient.
6. M commute avec A' si et seulement si M est diagonale.
Les matrices qui commutent avec A sont donc les matrices de la forme PMP^{-1} avec M diagonale i.e. de la forme $\begin{bmatrix} 4a - 3d & -2a + 2d \\ 6a - 6d & -3a + 4d \end{bmatrix}$ où d et a sont 2 réels.

Exercice 9.

1. La matrice de f dans la base canonique est
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$
2. $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ et $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$.
3. Les valeurs propres sont 4 et 6, de vecteurs associés $(1,1)$ et$(1,-1)$ respectivement.
4. $A^n = P\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, d'où
$$A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4^n + 6^n & 4^n - 6^n \\ 4^n - 6^n & 4^n + 6^n \end{bmatrix}.$$
5. $A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ donc $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ convient. Si on pose $C = PBP^{-1}$ alors $C^2 = PB^2P^{-1} = A$.
Donc $C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} & 2-\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \end{bmatrix}$ convient.
6. M commute avec A' si et seulement si M est diagonale.
Les matrices qui commutent avec A sont donc les matrices de la forme PMP^{-1} avec M diagonale i.e. de la forme $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & a-d \\ a-d & a+d \end{bmatrix}$ où d et a sont 2 réels.