☢ ☯ L3-M1 – Exercices d'Analyse Complexe ☯ ☢

1. Nombres complexes

Exercice 1.

(1) *Calculer* $|\sin z|$, $|\cos z|$ *pour* $z \in \mathbb{C}$.

(2) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$: $\sin z = 0$ $\cos z = 0$, $\cos z = 2$ & $\cos(3z) = i$.

Exercice 2.

(1) *Calculer* $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

(2) *Soit* $\epsilon > 0$. *Montrer que la suite de fonctions* $(S_n)_n$ *est uniformément majorée sur l'intervalle* $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$. *L'est elle sur* $[0, 2\pi]$ *?*

Exercice 3. *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, *montrer que*

(1) *Il existe* $J \subset \{1, \dots, n\}$: $\Big|\sum_{j \in J} a_j\Big| \geq \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |a_j|$.

(2) *Il existe* $x \in [0,1]$: $\Big|1 - \sum_{j=1}^{n} a_j e^{2i\pi jx}\Big| \geq 1$.

Exercice 4. *Dans le plan complexe, montrer que trois point* a, b, c *forment un triangle équilatéral si, et seulement si*

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

Exercice 5. *Soient* a, b, c *trois nombres complexes de module* 1, *deux à deux distincts et tels que* $a + b + c = 0$. *Montrer qu'ils sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

Exercice 6. *Soient* a, b *deux nombres complexes de partie réelle négative ou nulle. Montrer que*

$$|e^a - e^b| \leq |a - b|.$$

2. Equations de Cauchy-Riemann

Exercice 7. *Soit pour* $|\alpha| < 1$, $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$ *vérifier que* $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Exercice 8. *Montrer que* $f(z) = \exp\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ *et bornée sur* $\partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$. *Est-elle bornée sur* $\mathbb{D}$ *?*

Exercice 9. *(Cauchy-Riemann, opérateurs* ∂ *et* $\overline{\partial}$*) Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$.
(0). Si $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$, *montrer que (*$f$ *est constante)* $\iff$ *(*u *est constante)* $\iff$ *(*v *est constante)* $\iff$ $(\overline{f} \in \mathcal{O}(\Omega))$ $\iff$ *(*$|f|$ *est constante).*
(1). Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *montrer que* $f' = \partial_x f = i^{-1}\partial_y f$.
(2). Si f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *(au sens réel), montrer que* $4\partial\overline{\partial} f = \Delta f$.

(3). *Si* $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$: $\partial\overline{\partial}\big(f\overline{g}\big) = f'\overline{g'}$. *En déduire que si* $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ *sont telles que* $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ *est constante sur* Ω, *alors chacune des fonctions* f_k *doit être constante sur* Ω.
(4). *Si* $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *sont telles que* $f + \overline{g} \in \mathbb{R}$ *sur* Ω, *montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(z) = c + g(z)$ *sur* Ω.
(5). *Déterminer toutes les fonctions* $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$ *telles que* $u^2 + iv^2 \in \mathcal{O}(\Omega)$.
(6). *Que dire de* $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$ *s'il existe* $a, b \in \mathbb{C}^\star$ *tels que* $au + bv$ *soit constante sur* Ω ?
(7). *Si* f *est différentiable (au sens réel) sur* Ω *montrer que* $\overline{\partial} f = \overline{\partial \overline{f}}$, *et* $\overline{\partial}\,\overline{f} = \overline{\partial f}$. *Enfin,* $\overline{f} \in \mathcal{O}(\Omega) \iff \partial f = 0$ *et* $\overline{f}\,' = \overline{\overline{\partial} f}$.
(8). *Soit* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. *On note* $\Omega^\star := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \overline{z} \in \Omega\}$ *et on pose* $f^\star(z) := \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \Omega^\star$. *Montrer que* $f^\star \in \mathcal{O}(\Omega^\star)$. *Si* $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ *et* $f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ *alors montrer que* $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ *pour tout* $z \in \Omega$.

Exercice 10. *Soient* $R > 0$, $f, g \in \mathcal{O}(D_R := D(0, R))$.
- *On suppose que* $\forall z \in D_R \,:\, g(z) \neq 0$, $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *telle que* $f = cg$ *sur* D_R.
- *En déduire que* $|f|$ *constante sur* $D_R \implies f$ *constante sur* D_R.
- *Si* $\varphi(z) := \overline{f}(\overline{z})$, $g(z) := \frac{1}{2}\big(f(z) + \varphi(z)\big)$, $h(z) := \frac{1}{2i}\big(f(z) - \varphi(z)\big)$. *Montrer que* $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, *exprimer la dérivée de* φ *en fonction de celle de* f *et montrer que* f *et* g *prennent des valeurs réelles sur l'axe réel.*

Exercice 11. *Soient* $\mathcal{U}$ *un ouvert connexe non vide* $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ *telles que* $f + \overline{g} \in \mathbb{R}$ *sur* $\mathcal{U}$. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f + g = c$ *sur* $\mathcal{U}$.

Exercice 12. (Logarithme complexe) *Soit* $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < Im(z) < \pi\}$ *et* $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.
(1). *Montrer que l'application holomorphe* $z \mapsto \exp(z)$ *induit un homéomorphisme* E *de* $\mathbb{B}$ *sur* Ω, *dont l'homéomorphisme inverse* $L := E^{-1}$ *est l'unique fonction holomorphe sur* Ω *vérifiant* $L'(w) = 1/w$, $w \in \Omega$ *et qui coincide avec la fonction logarithme usuelle sur* $]0, +\infty[$. *Cette fonction sera notée* $\log$, *c'est la* détermination principale du logarithme complexe.
(2). *Montrer que si* $z \in \Omega$, *on a* $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ *où* $\arg(z)$ *est l'unique nombre réel* $\theta \in]-\pi, \pi[$ *tel que* $z = |z|e^{i\theta}$ *(c'est la* détermination principale de l'argument).
(3). *Déterminer toutes les solutions de l'équation* $e^z = w, w \in \mathbb{C}$.
(4). *Soient* $z, z' \in \Omega$ *tels que* $zz' \in \Omega$.
• *Montrer que* $\log(zz') = \log(z) + \log(z') + 2ik\theta$ *où* $k \in \mathbb{Z}$
• *Si* a *et* b *sont les déterminations principales des arguments respectifs de* z *et* z', *montrer que* $k = 0$ *si* $-\pi < a + b < \pi$, $k = -1$ *si* $-\pi < a + b$ *et* $k = 1$ *si* $a + b > \pi$.
(5). *Soit* $x > 0$.
• *Déterminer* $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \Big(\log(x + i\epsilon) - \log(x - i\epsilon)\Big)$
• *La fonction* $\log$ *se prolonge-t-elle continuement en des points de* $]-\infty, 0[$?
(6). *Existe-t-il une fonction holomorphe* F *sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *telle que* $F'(z) = 1/z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 13. (Automorphismes de Δ)
(1). *Soit* $\alpha \in \Delta$. *On pose* $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$. *Montrer que* φ_α *réalise une bijection holomorphe de* Δ *dans lui-même et expliciter* φ_α^{-1}.
(2). *Soit* $f \,:\, \Delta \to \Delta$ *une application holomorphe telle que* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. *On veut montrer que* $f(z) = z$. *Supposons au contraire que* $f(z) = z + c_k z^k + \sum_{j \geq k+1} a_j z^j$ *avec* $c_k \in \mathbb{C}^\star$.
(2.1). *Montrer que* $|c_k| \leq 1$.
(2.2). *Montrer que* $f^n(z) = f \circ f \circ \cdots \circ f(z) = z + nc_k z^k + \sum_{j \geq k+1} a_{j,n} z^j$, *puis conclure.*
(3). *Soit* $f \in Aut(\Delta) := \{f \,:\, \Delta \to \Delta$ *holomorphe, bijective avec* f^{-1} *holomophe*$\}$
(3.1). *Montrer que* f' *ne s'annule pas dans* Δ.

(3.2). On pose $\alpha = f(0)$ et $g = \varphi_\alpha \circ f$. Montrer que $g \in Aut(\Delta)$ et vérifie $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = ze^{i\theta}$.

(3.3). En déduire qu'il existe $\beta \in \Delta$ tel que $f(z) = e^{i\theta}\varphi_\beta(z)$.

Exercice 14. *(Koebe) Soit $|\alpha| \leq 1$ et $f_\alpha(z) = \dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}$.*
(1). Montrer que f_α est injective dans Δ.
(2). Décrire $f_\alpha(\partial\Delta)$ lorsque $|\alpha| = 1$ et en déduire $f_\alpha(\Delta)$.

3. Suites et séries de fonctions

Exercice 15. *Soit $g_n(z) = \dfrac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ est normalement convergente sur tout compact de*

$$\begin{cases} D(0,1) \text{ vers } \frac{z}{(1-z)^2} \\ \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)} \text{ vers } \frac{1}{(1-z)^2} \end{cases}$$

Exercice 16. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f(z^n)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{D}$ (on peut commencer par montrer que si $0 < r < 1$ et $|z| \leq r$: $|f(z)| \leq \dfrac{\|f\|_{\mathbb{D}_r}|z|}{r}$.*

Exercice 17. *Soit f une fonction entière telle que pour tout $a \in \mathbb{C}$ le DSE $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ possède au moins un coefficient nul. Avec le théorème de Baire montrer qu'alors $f \in \mathbb{C}[z]$.*

Exercice 18. *Déterminer toutes les suites $(u_n)_n \in L^1(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $k \geq 1$: $\sum_{n\geq 1} u_n 2^{-nk} = 0$.*

Exercice 19. *Vérifier que tous les points du cercle de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ sont singuliers.*

4. Topologie de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, Montel....

Exercice 20. *$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est muni de sa topologie usuelle.*

0) Soit $P = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, si $d \geq 1$ montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$|z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad |P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_d z^d|$$

en déduire que $\mathbb{C}[z] \subset \big(\mathcal{O}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{C}})\big)$.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{C}})$.

1) Montrer que si $f(\infty) = a \in \mathbb{C}$, alors f est constante.

2) On suppose $f(\infty) = \infty$, et soit $g(z) = f(z^{-1})$. Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et que son éventuelle singularité à l'origine ne peut être essentielle.

3) En déduire que $O(\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[z]$.

Exercice 21. *Donnez une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss basée sur le théorème de l'application ouverte.*

Exercice 22. *(Problème famille normales - extrait exam. M1 03/97.)*

Soient $0 \in U \subset \Omega$ deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur U vers une fonction f telle que $f'(0) \neq 0$. On se propose de démontrer le théorème de Carathéodory : Il existe V un ouvert tel que $0 \in V \subset U$, W un voisinage de $f(0)$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$:

– *f_n et f sont injectives sur V.*
– *$W \subset f_n(V)$.*
– *$f_n^{-1} \to f^{-1}$ uniformément sur W.*

1) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $D(0,r) \subset\subset U$ et f injective sur U.

2) Montrer que $f(C(0,r))$ et $f(\overline{D}(0,\frac{r}{2}))$ sont deux compacts disjoints.

3) Montrer qu'il existe un entier $N_1(r)$ tel que pour $n \geq N_1(r)$ on ait $f_n(C(0,r)) \cap f(\overline{D}(0,\frac{r}{2})) = \emptyset$.

4) En déduire que $\forall w \in f(\overline{D}(0,\frac{r}{2}))$, $\forall n \geq N_1(r)$, $f_n - w$ est sans zéros sur $C(0,r)$, puis que le nombre de zéros de $f_n - w$ dans $D(0,r)$ est

$$N_{f_n}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \frac{f_n'(\zeta)d\zeta}{f_n(\zeta) - w}, \ \forall n \geq N_1(r), \ \forall w \in f(D(0,\frac{r}{2})).$$

5) Montrer qu'il existe un entier $N_2(r)$ tel que pour $n \geq N_2(r)$ et $w \in w \in f(D(0,\frac{r}{2}))$ la fonction $f_n - w$ s'annule exactement une fois sur $D(0,r)$.

6) Montrer qu'il existe un entier $N_3(r)$ tel que pour $n \geq N_3(r)$: $f_n(\overline{D}(0,\frac{r}{3})) \subset f(D(0,\frac{r}{2}))$.

7) En déduire que pour $n \geq N_4(r) := \max(N_3(r), N_2(\frac{r}{2})$ f_n est injective sur $D(0,\frac{r}{3})$ à valeurs dans $f(D(0,\frac{r}{6}))$.

8) Montrer que $V = D(0,\frac{r}{3})$ et $W = f(D(0,\frac{r}{6}))$ répondent à la question.

On peut admettre (où démontrer) la formule des résidus :

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)dz}{f(z) - w}, \ \forall w\, inf(D(0,r)).$$

Exercice 23. *(extrait exam. M1 04/1999). Soient Ω, ω deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$, avec Ω connexe. On note*

$$\mathcal{F} = \{\, f \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f(\Omega) \cap \omega = \emptyset \,\}.$$

Pour $(f_k)_k \subset \mathcal{F}$, montrer que l'on est dans l'alternative suivante :

– *ou bien $(f_k)_k$ est normale dans $\mathcal{H}(\Omega)$,*

– *ou bien $(f_k)_k$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers le point à l'infini.*

(on pourra à partir de $\mathcal{F}$ construire une nouvelle famille qui elle est normale....) Le résultat subsiste t'il si Ω n'est plus connexe ?

Exercice 24. *Ω est un domaine de $\mathbb{C}$,*

1) Si $E \subset \Omega$ admet au moins un point d'accumulation dans Ω. Montrer que toute suite bornée de fonctions holomorphes sur Ω simplement convergente sur E converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$. (Théorème de Vitali-Stieljes).

2) Soit $(g_n)_n$ une partie bornée de $\mathcal{O}(\Omega)$, montrer que les propriétes suivantes sont équivalentes :

– *La suite $(g_n)_n$ converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$.*
– *$\exists\, c \in \Omega \ : \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ les suites $(g_n^{(k)}(c))_n$ convergent.*
– *L'ensemble $\{z \in \Omega$ tels que $(g_n(z))_n$ converge $\}$ admet au moins un point d'accumulation dans Ω.*

Exercice 25. *(Théorème d'Hurwitz) Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$ *et* $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ *qui converge dans* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vers* f.

1) Si $f \not\equiv 0$, $D(a,r) \subset\subset \Omega$ *vérifie* $f(z) \neq 0$ *sur* $\mid z-a \mid = r$, *montrer qu'il existe un entier* N *tel que pour* $n \geq N$: f_n *et* f *ont le même nombre de zéros dans* $D(a,r)$.

2) Si f_n, $(n \geq 1)$ *est sans zéros sur* Ω *montrer que, soit* $f \equiv 0$, *soit* f *est sans zéros sur* Ω.

3) $a \in \Omega$ *et* $\mathcal{H}_a$ *désigne l'ensemble des fonctions holomorphes injectives sur* Ω *telles que* $\mid f(z) \mid < 1,\ f(a) = 0$. *Montrer que* $\mathcal{H}_a \cup \{0\}$ *est une partie compacte de* $\mathcal{O}(\Omega)$.

Exercice 26. *Soit* $\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ 0 <\mid z \mid< 1\}$, *si* $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ *admet en* $z = 0$ *une singularité essentielle on note pour* $n \geq 1$, *et* $z \in \mathcal{U}$: $g_n(z) := f(2^{-n}z) \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. *On va montrer que la famille* $(g_n)_n$ *n'est pas une famille normale :*

1) Montrer qu'il existe une suite $(z_k)_k \subset \mathcal{U}$, *une suite d'entiers* $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ *telles que*

$$\frac{1}{4} >\mid z_1 \mid>\mid z_2 \mid> \cdots , \quad \lim_{\infty} \mid z_k \mid = 0 \quad 2^{-n_k-2} \leq\mid z_k \mid< 2^{-n_k-1},\ \lim_{\infty} f(z_k) = 0.$$

2) Conclure en raisonnant par l'absurde.

Exercice 27. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Si une suite* $(g_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ *est simplement convergente sur* Ω *montrer qu'il existe un ouvert dense* $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ *tel que* $(g_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{O}(\tilde{\Omega})$. *(Théorème d'Osgood).*

Exercice 28. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *telle que* $\overline{f(\Omega)}$ *est compact dans* Ω *on note* $(f_n)_n$ *la suite des itérés de* f. *Montrer que* $\cap_{n\geq 1} f_n(\Omega)$ *est compact dans* Ω *puis que* $(f_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ *vers une constante.*

Exercice 29. Ω *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $z_0 \in \Omega$. *Soit* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *telle que* $f(z_0) = z_0$ *et* $\mid f'(z_0) \mid< 1$.

1) Montrer qu'il existe $r > 0$ *tel que* $D(z_0,r) \subset\subset \Omega$ *et pour* $0 <\mid z - z_0 \mid< r$:

$$\mid \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \mid< \frac{1}{2}(1+ \mid f'(z_0) \mid).$$

2) En déduire que $f(\overline{D}(z_0,r)) \subset \overline{D}(z_0,r)$, *puis que la suite* $(f_n := f \circ f \circ \cdots \circ f)_n$ *converge uniformément sur* $\overline{D}(z_0,r)$ *vers la fonction constante* z_0. *Que dire de plus si* Ω *est un domaine borné ?*

Exercice 30. $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0 \}$, *si* $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cup L^\infty(\Omega)$ *vérifie* $\lim_{y\to 0_+} f(iy) = a \in \mathbb{C}$ *on* *pose* $f_n(z) := f(zn^{-1})$. *Montrer que pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}_+^\star$: $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} \mid f_n(iy) - a \mid = 0$. *En déduire que la seule valeur d'adhérence de* $(f_n)_n$ *dans* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est la fonction constante* $g \equiv a$ *puis que* $(f_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vers* g.

Exercice 31. *Soient*

– – $(\alpha_n)_n$ *une suite bornée non constante de nombres complexes.*

– – $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ *une fonction entière telle que* $c_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

– – μ *une mesure complexe à support compact dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $\int_{\mathbb{C}} f(\alpha_n z) d\mu(z) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Pour $w \in \mathbb{C}$ *on pose* $\varphi(w) = \int_{\mathbb{C}} f(wz) d\mu(z)$, *montrer que* $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

2) Montrer que $\varphi \equiv 0$.

3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_{\mathbb{C}} z^n d\mu(z) = 0$.

4) Enfin, si $g_n(z) := f(\alpha_n z)$ *montrer que l'espace vectoriel engendré par les* g_n *est dense dans* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Exercice 32. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ une famille normale ne possédant pas comme valeur d'adhérence dans $\mathcal{O}(\Omega)$ la fonction constante $g \equiv a$. Montrer que pour tout compact K de Ω on peut trouver un entier N_K tel, que pour toute $f \in \mathcal{F}$ le nombre de zéros dans K de $z \to f(z) - a$ ne peut exéder N_K.(indic : sinon pour K fixé considérer une suite $(f_k)_k \subset \mathcal{F}$ telle que pour tout $k \geq 0$ le nombre zéros de $f_k - a$ dans K est $\geq k$...)*

Exercice 33. *Soit Ω un ouvert non vide et distinct de $\mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $r > 0$ on pose si $p \geq 1$: $E_p = \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \ : \ \forall z \in D(a,r) \cap \Omega \quad | f(z) | \leq p \}$.*

1) Si $(z_n)_n \subset \Omega$ verifie $\lim_n z_n = a$ on note pour $f \in E_p$: $f_n(z) = 2p + \dfrac{z_n - a}{z - a}(f(z) - 2p)$. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{O}(\Omega)$, puis que E_p est d'intérieur vide dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

2) Montrer que E_p est fermé dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

3) En déduire que $\mathcal{O}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega \cap D(a,r))$ est maigre dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

4) Si $F := \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \ : \ \exists \Delta_f$ domaine $\subset_{\neq} \Omega \ : \ f \in \mathcal{O}(\Delta_f) \}$ et $G := \mathcal{O}(\Omega) \setminus F$, montrer que F est maigre dans $\mathcal{O}(\Omega)$ que G est non maigre et partout dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et enfin que $\mathcal{O}(\Omega) = G + G$.

5. Formule de Cauchy

Exercice 34. (Cauchy)

(1). *Montrer que* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi}{1-|a|^2}, \ \forall |a| < 1.$

(2). *Pour $0 < a < b$, montrer que* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|ae^{i\theta} - b|^4} = \frac{a^2+b^2}{(b^2-a^2)^3}.$

(3). *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta})d\theta = 2\pi = \int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta} - i\theta)d\theta.$

Exercice 35. (Cauchy) *Soient $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $R > 0$, $a, b \in \mathbb{C} \setminus C(0,R)$ deux nombres complexes distincts.*

(1). *Calculer l'intégrale* $\displaystyle I(R) = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz.$

(2). *En déduire que toute fonction entière bornée est constante* (Liouville).

Exercice 36. (Cauchy) *En intégrant $f(z) = (z+a)^{-1}e^{iz}$, $(a > 0)$ le long du carré de sommets 0, R, $R + iR$, iR, $(R > 0)$, puis, faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x+a}dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x^2+1}dx$ *et retrouver* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

Exercice 37. (Cauchy) *Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$:*

$$\int_{C(c,r)^+} \overline{P(z)}dz = 2i\pi r^2 P'(c).$$

Exercice 38. (Cauchy) *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. On suppose que $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, utilisez la formule de Cauchy pour montrer que $f(z) = z$ sur $\mathbb{C}$. Donner une autre démontration plus simple.*

Exercice 39. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ vérifiant*

$$\exists\, c > 0 \ : \ |f(z)| \leq \frac{c}{1-|z|}, \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Pour $z \in \mathbb{D}$, *considérons le chemin* $\gamma(\theta) = z + (1-|z|)\dfrac{e^{i\theta}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. *Calculer* $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(u)}{(u-z)^2}du$ *pour en déduire*

$$|f'(z)| \leq \frac{4c}{(1-|z|)^2}, \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Exercice 40. *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *vérifiant pour tout* $r > 0$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta \leq r^{17/3}$. *Montrer que* $f \equiv 0$.

Exercice 41. *Existe t'il* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\star)$ *vérifiant*

$$\forall z \in \mathbb{C}^\star \ : \ \big|f(z)\big| \geq \frac{1}{|\sqrt{z}|} \ ?$$

Exercice 42. *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* > -1 *et* $0 < r < R$. *On désignera par* Γ *le polygône orienté dont les sommets sont successivement* r, R, $R(1+a)$, $r(1+a)$.
(1). Exprimer l'intégrale le long de Γ *de* $f(z) := z^{-1}e^{-z}$.
(2). En déduire la formule suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(e^{-t} - e^{-(1+a)t}\big)t^{-1}dt = \log(1+a)$.
(3). En se ramenant à la question précédente par un changement de variable, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a - 1}{\log(t)}dt$.

Exercice 43. *(le théorème de d'Alembert) Soient* $d \geq 1$, $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, Γ_R *le circuit orienté positivement contitué par le demi-cercle de* $C(0,R)$ *situé dans le demi-plan* $\{Im(z) > 0\}$ *et du segment* $[-R, R]$. *On suppose* P *sans zéros sur* $\mathbb{C}$, *calculer* $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}}$ *et conclure.*

6. Liouville, Principe du maximum, zéros isolés

Exercice 44. *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. *Si* $Re(f)$ *possède un maximum ou minimum local en un point* a *de* Ω, *montrer que* f *est constante (considérer* $g = \exp(f)$*...)*

Exercice 45. *Soit* $a \in \Omega$ *ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *; soit* $r > 0$ *tel que* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *et* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. *Si* $f(D(a,r)) \subset \mathbb{R}$, *montrer que* f *est constante.*

Exercice 46. *Soient* $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *vérifiant* $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ |f(z)| \leq |g(z)|$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $f = \lambda g$.

Exercice 47. *Si* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *est sans zéros sur* $\mathbb{D}$, *montrer qu'il existe une suite* $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ *telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 1 \text{ et } \big(f(z_n)\big)_n \text{ bornée.}$$

Exercice 48. *Existe t'il* f *holomorphe sur un voisinage de l'origine et telle que* $f(\dfrac{1}{2n}) = f(\dfrac{1}{2n+1}) = \dfrac{1}{n}$ *pour tout* $n \geq N_f$ *?*

Exercice 49. *Déterminer le nombre de zéros de* $Q(z) = z^7 - 2z - 5$ *situés dans le demi-plan* $\{\, Re(z) > 0\}$.

Exercice 50. *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *telle que* $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.

– *Montrer que* f *ne possède qu'un nombre fini de zéros* $z_1, \dots, z_p$ *de multiplicités* $m_1, \dots, m_p$, *et montrer que*
$$g(z) = \frac{(z-z_1)^{m_1}\dots(z-z_p)^{m_p}}{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$
– *Montrer que* $|g(z)| \leq c\big(1 + |z|^{m_1+\dots+m_p}\big)$ *sur* $\mathbb{C}$.
– *En déduire que* $f \in \mathbb{C}[z]$.

Exercice 51. *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *telle que* $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.

– *Montrer que* f *ne possède qu'un nombre fini de zéros* $z_1, \dots, z_p$ *de multiplicités* $m_1, \dots, m_p$, *et montrer que*
$$g(z) = \frac{(z-z_1)^{m_1}\dots(z-z_p)^{m_p}}{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$
– *Montrer que* $|g(z)| \leq c\big(1 + |z|^{m_1+\dots+m_p}\big)$ *sur* $\mathbb{C}$.
– *En déduire que* $f \in \mathbb{C}[z]$.

Exercice 52. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une fonction holomorphe sur le disque unité, si* $|f(z)| \leq$ 2003 *pour* $|z| < 1$. *Est-il possible que* $a_{2004} = 2004$ *?*

Exercice 53. *0) Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\sin(z) = 0$.
1) Soit $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.

1.1) Quel est le plus grand ouvert Ω *sur lequel* f *est holomorphe ?*

1.2) Montrer que f *possède une infinité de zéros dans* Ω *et que cet ensemble possède un point d'accumulation dans* $\mathbb{C}$.

1.3) Ceci contredit-t-il le théorème des zéros isolés ? (justifiez votre réponse)

2) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *une fonction entière* **non identiquement nulle**. *On désigne par* $Z(f)$ *l'ensemble* $\{\, z \in \mathbb{C} \; : \; f(z) = 0\}$ *de ses zéros.*

2.1) Donner un exemple d'une fonction f *non constante telle que* $Z(f) = \emptyset$.

2.2) Donner un exemple d'une fonction f *non constante telle que* $Z(f)$ *soit infini.*

2.3) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *telle que* $Z(f)$ *soit infini. Montrer que pour tout* $R > 0$ *l'ensemble* $Z_R(f) := Z(f) \cap \{\, |z| < R\}$ *est fini.*

2.4) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *telle que* $Z(f)$ *soit infini. Montrer que* $Z(f)$ *est dénombrable (indication : une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est toujours dénombrable......).*

2.5) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *telle que* $Z(f)$ *soit infini. Soit* $(z_n)_n$ *(cf 2.4) l'ensemble de ses zéros. Montrer que* $\lim_n |z_n| = +\infty$.

7. Formule des résidus, Séries de Laurent

Exercice 54. *L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur des intégrales de Fresnel*
$$I = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt \quad \& \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$$

0) Montrer que les intégrales impropres I *et* J *sont bien convergentes.*

1) Déterminer pour tout $R > 0$, la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$ où γ_R est le circuit :

2) En déduire que (on rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$I + iJ + \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz - e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

3) Montrer (faire une intégration par parties)

$$\Big| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \Big| \leq \frac{e^{-R^2}}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{\pi}{4R}$$

4) Et en déduire que $I = J = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 55. *Soit $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Déterminer le domaine d'holomorphie de f, ses points singuliers, précicer leur nature et calculer les résidus de f en chacuns de ces points. Calculer l'intégrale de f le long du lacet γ_R ci-dessous ($R > 1$)*

et en déduire que $\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 56. *Déterminer le développement en série de Laurent de*

$$f(z) = (1-z)^{-1} e^{1/z}$$

suivant les puissances de z dans les domaines $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ & $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Même question avec $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2} + \dfrac{1}{3-z}$ sur $\mathcal{C}_1 = \mathbb{D}$, $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z|\}$.

Exercice 57. *Calculer par la méthode des résidus $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+a)}$, ($a > 0$).*

Exercice 58. *Soient $0 < \alpha < 1$, γ_R ($R > 1$) le chemin reliant les points $R, R+iR, -R+iR, -R$. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} dz$ pour en déduire*

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Exercice 59. *Soit $f(z) = (1+2i)z(z-1)^{-1}(2z-i)^{-1}$. Déterminer le développement en série de Laurent de f dans les domaines $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$, $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 1\}$*

& $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z|\}$. Alors, si $a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1/2\}$ et $\gamma_{a,b} \ : \ t \in [0,1] \mapsto a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t)$; calculer $\displaystyle\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$.

Exercice 60. *Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \cap l^1$.*
- *Montrer que la série $f(z) := \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{z-a_n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^\star$.*
- *Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}^\star$, préciser ses pôles et leur résidus.*
- *Montrer que $R := \displaystyle\sup_{n\geq 0} |a_n| = \limsup_{n\to+\infty} \Big|\sum_{k\geq 0} a_k^n\Big|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k\geq 0} |a_k^n|\Big)^{1/n}$. Pour cela, considérer le développement en serie de Laurent de f sur le complémentaire du disque $\overline{D(0,R)}$.*

Exercice 61. *En (par exemple) effectuant le changement de variables $z = 1/w$ vérifier que*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1/5)^+} \frac{dz}{\sin(z^{-1})} = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}$$

Exercice 62. *Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{S}_1^+} \frac{z^{11}dz}{12z^{12} - 4z^9 + 2z^6 - 4z^3 + 1} = \frac{1}{12}$. On pourra commencer par localiser les racines du polynôme au dénominateur avec Rouché pour en déduire qu'on peut tout aussi bien intégrer sur un cercle de rayon $R > 1$, puis conclure.*

Exercice 63. *1) Soit $f(z) = (z-1)^{-1}\exp(z^{-1})$, déterminer le développement en série de Laurent en puissances de z de f dans $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$ et $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| < 1\}$.*
2) Même question avec $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$. et $D = D(0,1)$, $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 3\}, C_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 3 < |z|\}$.

Exercice 64. *Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1/5)^+} \frac{dz}{\sin(z^{-1})} = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}$.*

Exercice 65. *Pour $0 < a < 1$, on se propose de calculer par la méthode des résidus l'intégrale*

$$I_a = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$

1) Pour $r \in \mathbb{R}$, on définit l'intégrale $J_r = \displaystyle\int_r^{r+2i\pi} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$. Vérifier que $|J_r| \leq 2\pi\dfrac{e^{ar}}{|1-e^r|}$, $\forall r \in \mathbb{R}^\star$.
2) Soit $R > 0$ et γ_R le lacet formé par le bord orienté du rectangle de sommets $-R, +R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi$, calculer $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{az}}{1+e^z}dz$.
3) En déduire que $I_a = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.
4) En déduire que pour $0 < a < 1$: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$. Retrouver ce résultat en intégrant $g(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$ sur le contour ci-dessous (aprés avoir choisi une détermination convenable du logarithme).

Exercice 66. *Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+\pi^2)^2}dx = \frac{\log(\pi)-1}{4\pi^2}$.*

Exercice 67. *Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi\alpha}{2})}$.*

Exercice 68. *Soit* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \cap l^1(\mathbb{N})$.

1) Montrer que la série $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{z-a_n}$ *est normalement convergente sur tout compact de* $\mathbb{C}^\star$. *Montrer que* f *est méromorphe sur* $\mathbb{C}^\star$, *préciser ses pôles et leurs résidus.*

2) Montrer que

$$R := \sup_n |a_n| = \limsup_n |\sum_{k\geq 0} a_k^n|^{1/n} = \limsup_n \sum_{k\geq 0} |a_k^n|^{1/n}.$$

Exercice 69. *Montrer que pour tout* $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\zeta\cos(\theta)}d\theta = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\zeta^n}{n!}\right)^2.$$

8. Lemme de Schwarz

Exercice 70. *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et* $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. *On pose pour* $z \in \mathbb{D}^\star$

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$

– *Montrer que* g *se prolonge holomorphiquement à* $\mathbb{D}$.
– *Montrer que* $\forall z \in \mathbb{D} : |g(z)| \leq 1$.
– *En déduire que* $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$.

On s'intéresse maintenant au cas d'égalité : supposons qu'il existe $0 < |z_0| < 1$ *tel que*

$$|f(z_0) + f(-z_0)| = 2|z_0|^2.$$

– *Montrer qu'alors il existe* $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *telle que*

$$h(z) = -h(-z), \forall z \in \mathbb{D} \text{ et } \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z^2 + h(z) \text{ sur } \mathbb{D}.$$

– *Montrer qu'alors* $|h(z)|^2 \leq 1 - |z|^4$ *sur* $\mathbb{D}$ *et conclure.*

9. Produits infinis

Exercice 71. *Montrer que le produit infini*

$$f(z) = \prod_{n\geq 1}(1 + z^{2^n})$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}$ *et que* $\forall\, z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = \prod_{n\geq 1}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

Exercice 72. *Montrer que le produit infini*

$$f(z) = \prod_{n\geq 1}(1 - \frac{z^2}{n^2})$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. *En considérant* $h(z) = zf(z)$ *et la formule "bien connue"*

$$\pi\, cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2 - n^2}\ ,\ z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},$$

établir la formule : $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\geq 1}(1 - \frac{z^2}{n^2})$

Exercice 73.

– *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$*, on suppose qu'il existe* $r > 1$ *rel que* $[0, r[\subset \Omega$*. S'il existe* $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ *vérifiant la formule de duplication*

$$2h(2z) = h(z) + h(z + \frac{1}{2})$$

dés que $2z,\ z,\ z + \frac{1}{2} \in [0, r[$*, montrer que* h *est constante (Lemme d'Herglotz).*

– *Sous les hypothèses précédentes, si pour* $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ *il existe* $\in \mathbb{C}^\star$ *tel que*

$$g(2z) = cg(z)g(z + \frac{1}{2}) \text{ dés que } 2z,\ z,\ z + \frac{1}{2} \in [0, r[$$

montrer que $g(z) = ae^{bz}$ *où* $1 = ace^{b/2}$.

– *En déduire que si* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *est paire, si ses seuls zéros dans* $[0, 1]$ *sont* 0 *et* 1 *et sont simples et si elle vérifie*

$$\exists c \in \mathbb{C}^\star \ :\ f(2z) = cf(z)f(z + \frac{1}{2}),\ \forall\, z \in \mathbb{C},$$

alors $f(z) = \frac{2}{c}\sin(\pi z)$.

– *Retrouver la formule établie dans l'exercice précédent, à savoir*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\geq 1}(1 - \frac{z^2}{n^2}),\ z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 74. *Sur la fonction de Weierstrass* $\Delta(z) = ze^{\gamma z}\prod_{n\geq 1}\big(1 + e^{z/n}\big)e^{-z/n}$.

(1). Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}\ :\ |1 - (1 - w)e^w| \leq |w|^2$.

(2). En déduire que le produit infini $H(z) = z\prod_{n\geq 1}\big(1 + e^{z/n}\big)e^{-z/n} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(3). Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C}\ :\ -H(z)H(-z) = \dfrac{z}{\pi}\sin(\pi z)$ *et* $H(1) = e^{-\gamma}$ *où* $\gamma := \lim_n 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ *est la constante d'Euler.*

(4). Avec la définition de la constante d'Euler γ *montrer que pour* $p < q$ *:*

$$\lim_n \sum_{k=pn+1}^{qn} \frac{1}{k} = \log(\frac{q}{p}) \quad \textit{puis} \quad \lim_n \prod_{k=1}^{pn}(1 - \frac{z}{k})\prod_{k=1}^{qn}(1 + \frac{z}{k}) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\exp\big(z\log(\frac{q}{p})\big),\ \forall z \in \mathbb{C}^\star.$$

(5). Montrer que $H(z) = e^{-\gamma z}\lim_n \dfrac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} = \dfrac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(z)}$ *et* $\pi\Delta(z)\Delta(1 - z) = \sin(\pi z)$

Exercice 75. *Soit* $(p_n)_n$ *la suite croissante des nombres premiers. Montrer que la fonction zéta de Riemann* $\zeta(z) := \sum_{n\geq 1} n^{-z}$ *est holomorphe dans le demi-plan* $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\ :\ re(z) > 1\}$*. Montrer que* $\zeta(z) = \Big(\prod_{n\geq 1}(1 - p_n^{-z})\Big)^{-1}$*. Déduire de ce qui précède que la série* $\sum_{n\geq 1} p_n^{-1}$ *diverge.*

10. Fonctions harmoniques, sous-harmoniques

Exercice 76. *Soit* u *harmonique sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$*. Montrer que les dérivées partielles de* u *sont harmoniques sur* Ω*.*

Exercice 77. *Soit* f *holomorphe sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$ *à valeur dans un autre ouvert* Ω'*. Si* u *est harmonique sur* Ω'*, montrer que* $u \circ f$ *est harmonique sur* Ω*.*

Exercice 78. *Soit $(u_n)_n$ une suite monotone de fonctions harmoniques sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$, simplement convergente en au moins un point de Ω. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de Ω. (indic : on utilisera les inégalités de Harnack).*

Exercice 79. *1) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$, simplement convergente en au moins un point de Ω. Si la suite $(\Re e\ f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω, montrer qu'il en est de même pour la suite $(f_n)_n$. (indic : on utilisera la formule de Poisson).*

2) Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$ on pose $\mathcal{RH}(\Omega) = \{\ \Re e\ f\ ,\ f \in, \mathcal{H}(\Omega)\,\}$. Montrer que $\mathcal{RH}(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

Exercice 80. *A toute fonction scalaire f analytique sur le complémentaire d'un ensemble localement fini S on associe sa* **transformée de Kelvin** *Kf définie par $Kf(z) := \overline{f}(\overline{z}^{-1})$.*

1) Montrer que Kf est holomorphe sur le complémentaire de $S' = \{0\} \cup \{\,\overline{z}^{-1}\ :\ z \in S\}$. A quelle condition S' est-il localement fini dans $\mathbb{C}$? Cette condition étant remplie, dans quel cas 0 est il point régulier de Kf ?

2) Soit g la somme de la partie singulière du developpement de Laurent de f autour d'un point a de S. Montrer que Kg est, à une constante additive prés : si $a \neq 0$, la somme de la partie singulière du developpemt de Kf autour de $\overline{a}^{-1}$; si $a = 0$, la partie entière de Kf.

3) Supposant que S ne rencontre pas le bord du disque unité $D = D(0,1)$ on note a_j, $1 \leq j \leq m$, les points de $S \cup D$ et g_j la somme de la partie singulière du développement de Laurent de f autour de a_j. Montrer que $f + \sum_{j=1}^{m}(Kg_j - g_j)$ est analytique sur un ouvert contenant $\overline{D}$ et possède la même partie réelle que f sur la circonférence de D.

4) Appliquer ce que précède à la solution du problème de Dirichlet dans D pour une donnée f de la forme $x + iy \mapsto A(x,y)$ où est rationnelle. (exemple : $f(x+iy) = \frac{1}{16x^2+9}$).

11. Théorème de Runge

Exercice 81. *Si $\Omega = D(0,2)\setminus\overline{D(0,\frac{1}{2})}$. Montrer que la restriction au cercle unité de toute fonction holomorphe sur Ω est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Indiquer plusieurs méthodes.*

Exercice 82. *Si $\Omega = D(0,1)$ et $f \in \mathbb{C}(\Omega)$, montrer que f s'approche uniformément sur $\overline{D}$ par des polynômes en z si et seulement si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. (considérer $f_r(z) := f(rz)$).*

Exercice 83. *Soit $\Omega = D(0,1) \setminus \overline{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$. Montrer que Ω est simplement connexe, qu'il existe une suite de polynomes en z qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f(z) = (2z-1)^{-1}$ mais que la convergence ne peut etre uniforme sur Ω tout entier.*

Exercice 84. *(enveloppes polynomiales). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact.*
1) Montrer que $\mathbb{C} \setminus K$ ne possede qu'une composante connexe non bornée $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{U} \cup \infty$ est la composante connexe de $S^2 \setminus K$ qui contient le point ∞.
2) Montrer que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ est compact et que pour tout $a \in \mathcal{U}$ il existe un voisinage V de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ tel que $\mathbb{C} \setminus V$ soit connexe et $V \cap \overline{D}(a,r) = \emptyset$.
3) En déduire que pour tout $a \in \mathcal{U}$ il existe un polynome P tel que $\mid P(a) \mid > \parallel P \parallel_K$. (appliquer le théorème de Runge au compact $(\mathbb{C} \setminus V) \cup \overline{D}(a,r)$ et à une fonction convenablement choisie....)
4) Si G est une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$ montrer que $\forall a \in G,\ \forall P \in \mathbb{C}[z]\ :\ \mid P(a) \mid < \parallel P \parallel_K$.

5) On appelle enveloppe polynomiale de K l'ensemble :

$$\hat{K} = \{ z \in \mathbb{C} \ : | P(z) | \leq \| P \|_K,$$

donner une CNS pour que $\hat{K} = K$ et déterminer $\hat{K}$ pour K compact arbitraire.

Exercice 85. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose :*

$$\begin{aligned}\Omega_n = &\left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 2^{-n} <| z |< 2^n, \ \arg(z) \in]2^{-n}, 2\pi - 2^{-n} [\ \right\} \\ &\bigcup D(0, 2^{-n-1}) \bigcup \left\{ \ z \in \mathbb{C} \ : 2^{-n} <| z |< 2^n, \ | \arg(z) |< 2^{-n-1} \right\}\end{aligned}$$

A l'aide de cette famille d'ouverts, construire une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{C}[z]$ telle que $\lim_\infty P_n(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}^\star, \ P_n(0) = 1$. Peut on avoir uniforme convergence sur tout compact de $\mathbb{C}^\star$? Peut on avoir convergence dominée sur le cercle unité ? (i.e. $\exists \varphi \in L^1(\mathbb{T}) \ : \ \forall n \geq 1 \ \ | P_n(e^{i\theta}) |\leq \varphi(e^{i\theta})$). Enfin, trouver un ouvert Ω dense dans $\mathbb{C}$ pour lequel $(P_n)_n$ converge dans $\mathcal{O}(\Omega)$, (c.f. exo 4, feuille 1..).

Exercice 86. *(théorème de Mittag-Leffler) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $A \subset \Omega$ sans points d'accumulation dans Ω. A chaque $\alpha \in A$ on associe $m_\alpha \in \mathbb{N}^\star$ et la fraction rationnelle*

$$R_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m_\alpha} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}.$$

Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur Ω admettant exactement pour pôles l'ensemble A, et dont la partie principale en chaque $\alpha \in A$ est précisement R_α. (indic. : si $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts, $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ et $Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} R_\alpha(z)$, appliquer le théorème de Runge aux fractions Q_n pour construire la fonction méromorphe..)

Exercice 87. *(un problème d'interpolation) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\{z_j\}_j \subset \Omega$ une suite discrète de points deux à deux distincts de Ω. Soit $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}^\star$ et enfin $(a_{j,k})_{j\geq 1, 0 \leq k \leq n_j - 1} \subset \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que*

$$g^{(k)}(z_j) = k! a_{j,k}, \ j \geq 1, 0 \leq k \leq n_j - 1.$$

Exercice 88. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et ω un sous ouvert non vide de Ω. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathcal{O}(\Omega)$ est partout dense dans $\mathcal{O}(\omega)$.*
- *Chaque composante connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \omega$ rencontre $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.*

Exercice 89. *(extrait exam. 04/1999). Pour $n, m \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$ on pose :*

$$K_{n,m} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - n - im| \leq \frac{1}{4}\}, \ K_N = \bigcup_{|n|\leq N, |m| \leq N} K_{n,m}, \quad K = \bigcup_{N=0}^{\infty} K_N.$$

Et soit $f \ : \ K \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \sqrt{|n| + |m|}$ si $z \in K_{n,m}$.

1) Montrer que K_N, $N \in \mathbb{N}$ et K sont simplement connexe.
2)Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P_ε^N tel que $\sup_{z \in K_N} |P_\varepsilon^N(z) - f(z)| < \varepsilon$.
3) Montrer que pour tout $C > 0$ il n'existe pas de polynôme P tel que $\sup_{z\in K} |P(z) - f(z)| < C$.

(on pourra si un tel P existe trouver une contradiction en étudiant sa croissance à l'infini....)

12. Applications conformes, théorème de Riemann

Exercice 90. *(automorphismes de $\mathbb{C}$) Soit φ une bijection holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*
1) Montrer que φ^{-1} est continue et que pour tout compact K de $\mathbb{C}$, $\varphi^{-1}(K)$ est compact.
2) Montrer que $\lim_{|z|\to\infty} \mid \varphi(z) \mid = \infty$, et en déduire que φ à un pole à l'infini.
3) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $\mid \varphi(z) \mid \leq C(1+ \mid z \mid^k)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. $\star$ En déduire que φ est un polynome de degré inférieur ou égal a K, et finalement que $\varphi(z) = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$.

Exercice 91. *Appliquer conformément le demi-disque $D = \{ z \in \mathbb{C} \ : \mid z \mid < 1,\ \Im(z) > 0 \}$ sur le demi plan supérieur $P = \{ z \in \mathbb{C} \ :\ \Im(z) > 0 \}$.*

Exercice 92. *Appliquer conformément le secteur $S = \{ z \in \mathbb{C} \ :\ 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{4} \}$ sur le disque unité de manière à ce que les points $z_1 = e^{\frac{i\pi}{8}}$ et $z_2 = 0$ soient respectivement transformés en 0 et 1.*

Exercice 93. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et*

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{O}(\Omega),\ :\ |f(z)| \leq 1 \}.$$

Pour $z_0, z_1 \in \Omega$ on pose

$$d_\Omega(z_0, z_1) := \sup\{|f(z_1)|,\ f \in \mathcal{B}(\Omega),\ f(z_0) = 0\}.$$

1) Montrer que si $\Omega = \mathbb{C}$, alors $d_\Omega(z_0, z_1) = 0$, $\forall z_0, z_1 \in \Omega$. Calculer $d_\Omega(0, z)$ pour $\Omega = D(0, 1)$.
2) Montrer que $\forall z_0, z_1 \in \Omega$, $\exists f_{z_0,z_1} \in \mathcal{B}(\Omega)$ telle que

$$d_\Omega(z_0, z_1) = f_{z_0,z_1}(z_1) \text{ et } f_{z_0,z_1}(z_0) = 0.$$

3) Si Ω est connexe, montrer que $d_\Omega(z_0, z_1) < 1$. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouvert connexes tels qu'il existe une bijection holomorphe $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$.
4) Montrer que $d_{\Omega_1}(z_0, z_1) = d_{\Omega_2}(\varphi(z_0), \varphi(z_1))$. e. En déduire que si Ω est distinct de $\mathbb{C}$ et simplement connexe, $d_\Omega(z_0, z_1) > 0$, $\forall z_0 \neq z_1$ dans Ω.
5) Si $\Omega = D(0, 1)$ déduire la forme explicite de $d_\Omega(z_0, z_1)$.
6) Soit $r := dist(z_1, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ et $z_1' \in D(z_1, \frac{r}{2})$, montrer que

$$|d_\Omega(z_0, z_1') - d_\Omega(z_0, z_1)| \leq \frac{2}{r}|z_1 - z_1'|,$$

et en déduire que $d_\Omega(z_0, .)$ est une fonction continue.

Exercice 94. *Soit f une transformation conforme du disque unité D sur un carré ouvert de centre l'origine vérifiant $f(0) = 0$. On note enfin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ un DSE de f au voisinage de l'origine.*
1) Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $g(z) := f^{-1}(if(z))$. Montrer que g est bien définie sur D et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $g(z) = \alpha z$ sur D.
2) Montrer que $f(iz) = if(z)$ sur D. En déduire que $a_n \neq 0$ si $n \equiv 1(4)$.

Exercice 95. *Soient g et h des représentations conformes du disque unité D sur des ouverts U et V de $\mathbb{C}$; on pose $a = g(0)$, $b = h(0)$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $f(U) \subset V$.*
1) En appliquant le lemme de Schwarz à $l = h^{-1} \circ f \circ g$ montrer que pour $0 < r < 1$:

$$f\big(g(D(0, r))\big) \subset h(D(0, r)).$$

2) Vérifier que $\psi \ :\ z \mapsto \frac{2z}{z-1}$ est une transformation conforme de D sur $\{z \in \mathbb{C} \ :\ \Re e\ z < 1\}$.
Dans la suite $\rho > 0$ et $f \in \mathcal{O}(U)$ sont fixés. Pour $0 \leq r < \rho$ on pose

$$M_f(r) := \sup\{\mid f(z) \mid,\ \mid z \mid \leq r\}, \qquad A_f(r) := \sup\{\Re e\ f(z),\ \mid z \mid \leq r\}.$$

3) Etablir pour $0 \leq r < R < \rho$:

$$A_f(r) \leq \frac{R-r}{R+r} A_f(0) + \frac{2r}{R+r} A_f(R).$$

4) On suppose $f(z) \neq 0$ sur $D(0,\rho)$, montrer que pour $0 \leq r < R < \rho$ on a :

$$M_f(r) \leq M_f(0)^{\frac{R-r}{R+r}} M_f(R)^{\frac{2r}{R+r}}.$$

5) Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{O}(D)$ vérifiant $0 <\mid f_n(z) \mid \leq 1$ sur D pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim f_n(0) = 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ tends vers 0 dans $\mathcal{O}(D)$.

Exercice 96. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ different de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$. On pose*

$$\mathcal{F} := \{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : f(a) = 0,\ f'(a) = 1,\ f \text{ bornée sur } \Omega \}.$$

1) Montrer qu'il existe une unique fontion $g \in \mathcal{F}$ injective et telle que $g(\Omega)$ soit un disque D de centre 0. Dans toute la suite du problème R désignera le rayon de D.
2) On pose $m := \inf_{f \in \mathcal{F}} \Big(\sup_{z \in \Omega} \mid f(z) \mid \Big)$. On va montrer que g est le seul élément de $\mathcal{F}$ vérifiant $\|g\|_\Omega = m$. (m est donc égal au rayon R de D). Si φ est la fonction inverse de g et $f \in \mathcal{F}$ on pose $\Psi = f \circ \varphi$, ($\Psi \in \mathcal{O}(D)$).
3) Vérifier que $\Psi(0) = 0,\ \Psi'(0) = 1$.
4) Si $0 \leq r < R$, on pose $M(r) := \sup_{|z| \leq r} \mid \Psi(z) \mid$ et $c_n = \frac{\Psi^{(n)}(0)}{n!}$. Montrer que

$$M^2(r) \leq r^2 + \mid c_2 \mid^2 r^4 + \cdots + \mid c_n \mid^2 r^{2n} + \cdots,$$

en déduire que

$$M_f^2 \leq r^2 + \mid c_2 \mid^2 R^4 + \cdots + \mid c_n \mid^2 R^{2n} + \cdots,$$

où $M_f = \sup_D \mid \Psi \mid = \sup_\Omega \mid f \mid$. $\star$ On suppose $f \neq g$ montrer que $M_f > R$. Conclure.

Exercice 97. *(démonstration de Koebe du th. de Riemann). Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $0 \in \Omega \subset_{\neq} D := D(0,1)$. On désigne par $r = r(\Omega) := \max\{\rho > 0 : D(0,\rho) \subset \Omega\}$, et si $\alpha \neq 0$ par h_α l'automorphisme de D echangeant 0 et α.*
1) Soit $a \in D \setminus \Omega$ tel que $|a| = r$. Si $\varphi_r := e^{i\theta} h_b \circ \sqrt{} \circ h_a$, montrer qu'un choix convenable de θ réel et de b dans D donne φ_r injective de Ω dans D vérifiant $\varphi_r(0) = 0,\ \varphi_r'(0) = \frac{1+r}{2\sqrt{r}} > 1$.
2) On construit alors une suite de domaines $(\Omega_n)_n$ conformes à Ω :

$$0 \in \Omega_n \subset_{\neq} D : \Omega_0 = \Omega,\ \Omega_1 = \varphi_{r_0}(\Omega),\ \cdots, \Omega_{n+1} = \varphi_{r_n}(\Omega_n)$$

où $r_n = r_{(\Omega_n)}$. on pose enfin $g_n = \varphi_{r_n} \circ \cdots \circ \varphi_{r_0}$. Montrer que la suite $(g_n)_n$ est normale dans $\mathcal{O}(\Omega)$, calculer $g_n'(0)$, montrer que $r_n \to 1$ puis que $(g_n)_n$ converge vers la représentation conforme h de Ω sur D vérifiant $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$.

Exercice 98. *(extrait exam. 04/1999) Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| < 1,\ |z + \frac{i}{2}| < 1\}$. Le but de l'exercice est de trouver explicitement la représentation conforme f de Ω sur $D = D(0,1)$ vérifiant $f(0) = 0, f'(0) > 0$.*

1) Montrer que Ω est simplement connexe.
2) Si $C_1 = \{ |z - \frac{i}{2}| = 1 \}$, $C_2 = \{ |z + \frac{i}{2}| = 1 \}$, $P = -\frac{\sqrt{3}}{2} \in C_1 \cap C_2$, trouver l'angle entre C_1 et C_2 au point P.
3) Trouver une application holomorphe bijective de Ω sur un secteur $S = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \alpha\}$ et trouver α.
4) Trouver une application holomorphe bijective de S sur $T = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) > 0\}$.
5) Trouver une application holomorphe bijective de T sur D.
6) Trouver l'unique application holomorphe bijective de Ω sur $D = D(0,1)$ telle que $f(0) = 0, f'(0) > 0$.

13. Quelques problèmes

Exercice 99. *1) Soit X un compact connexe non réduit à un point de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C}\setminus X$ soit connexe.Montrer qu'il existe une bijection holomorphe φ de $\mathbb{C}\setminus X$ sur $\mathbb{C}\setminus \overline{D}(0,1)$ telle que $\lim_{|z|\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}$ existe.*

2) Montrer que φ est unique si on impose la condition supplémentaire

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} > 0.$$

(Indic : on peut supposer $0\in X$, et remarquer que l'application $w\mapsto \frac{1}{w}$ transforme $\overline{\mathbb{C}}\setminus X$ en un domaine simplement connexe inclus dans $\mathbb{C}$ et distinct de $\mathbb{C}$.....).

3) On définit sur $\mathbb{C}$ la fonction Φ_X par

$$\Phi_X(z) = 1 \quad si \quad z\in X,\ \Phi_X(z) = |\varphi(z)| \quad sinon.$$

3-a) Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{C}$.

3-b) Montrer que pour tout polynôme P, on a l'inégalité de Bernstein-Walsh :

$$|P(z)| \le \|P\|_X\big(\Phi_X(z)\big)^{\deg P},\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

où $\|P\|_X$ est la norme sup. de P sur X.
(Indic : si $\deg P = n\ge 1$ on considérera la fonction $P(z)(\varphi(z))^{-n}$ qui est analytiquement prolongeable à $\overline{\mathbb{C}}\setminus X$....)

4) Soit f une fonction complexe définie et bornée sur X. Pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de la variable complexe z de degré $\le n$. On pose enfin

$$\rho_n(f) := \{\,\|f-P\|_X,\ P\in\mathcal{P}_n\,\}.$$

4-a) On se propose de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $P_n\in\mathcal{P}_n$ tel que $\rho_n(f) = \|f-P_n\|_X$. Dans la suite $n\in\mathbb{N}$ sera fixé.

– *Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $Q_k\in\mathcal{P}_n$ tel que $\|f-Q_k\|_X \le \rho_n(f)+2^{-k}$.*
– *Montrer que $(Q_k)_k$ est une suite bornée dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.*
– *Montrer que $(Q_k)_k$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, si on désigne par P_n sa limite montrer que P_n répond à la question.*
– *On suppose que $\rho := \limsup_{n\to\infty}(\rho_n(f))^{\frac{1}{n}} < 1$.*

4-b) Montrer que f est la restriction à X d'une fonction analytique sur

$$\Omega_r = \{\,z\in\mathbb{C} : \Phi_X(z) < r\,\},\ avec\ \ \rho = r^{-1}.$$

(Indic : on considérera la série $P_0+\sum_0^\infty(P_{n-1}-P_n)$...). La réciproque non démontrée ici, est vraie. Le tout constitue le célèbre Théorème de Bernstein-Walsh.

Exercice 100. *Quelques notations : dans tout ce problème $R\in\mathbb{R}_+^\star\cup\{+\infty\}$, $\mathcal{E}_R$ désigne l'ensemble des séries entières $f(z)=\sum_{n\ge0}a_nz^n$ de rayon de convergence $\ge R$ ($\mathcal{E}_\infty$ est l'ensemble des fonctions entières) ; enfin si $R>0$ on note : $D_R := \{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|<R\}$, $\overline{D_R} := \{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|\le R\}$, $C_R := \{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|=R\}$ et $D_\infty := \mathbb{C}$.*
On se fixe R dans $\mathbb{R}_+^\star\cup\{+\infty\}$. Soient $f\in\mathcal{E}_R$, $\omega\in D_R$ et $|\omega|<r<R$

(1) *Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = 2\pi a_n r^n$.*

(2) *Montrer que $\displaystyle f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega}f(re^{it})dt$.*

(3) *Montrer que* $|f(\omega)| \leq \dfrac{r}{r-|\omega|} M_r(f)$ *(avec* $M_r(f) = \max\{\,|f(z)|,\ z \in C_r\,\}$*). En considérant* f^p, $p \in \mathbb{N}^\star$ *à la place de* f *en déduire que* $|f(\omega)| \leq M_r(f)$.

(4) *Qu'avez vous démontré ?*

(1) *Montrer pour* $j \in \mathbb{N}$ *la convergence de* $\sum_{n \geq j+1} a_n \omega^{n-1-j} =: b_j$.

(2) *Montrer que* $b_j = O(\dfrac{1}{r^j})$ *lorsque* j *tends vers* $+\infty$.

(3) *Montrer que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{j \geq 0} b_j z^j$ *est supérieur ou égal à* R.

(4) *On pose alors pour* $z \in D_R$: $g(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$. *Vérifier que* $\forall z \in D_R$: $(z-\omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$.

On suppose que f *s'annule en* $p \in \mathbb{N}^\star$ *points* $z_1, \dots, z_p$ *deux à deux distincts dans* $\overline{D_R} \backslash \{0\}$.

(5) *Montrer qu'il existe* $F \in \mathcal{E}_R$ *vérifiant pour tout* $z \in D_R$: $F(z) \prod_{j=1}^p (z - z_j) = f(z) \prod_{j=1}^p (r^2 - \overline{z_j} z)$.

(6) *Pour* $1 \leq j \leq p$ *et* $z \in C_R \setminus \{z_j\}_{j=1}^p$ *que vaut* $\left|\dfrac{r^2 - \overline{z_j} z}{z - z_j}\right|$ *?*

(7) *Montrer que* $M_r(f) \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geq |f(0)| r^p$.

(8) *On suppose que* $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}^\star$. *Montrer que*

$$M_r(f) \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}.$$

Soit $f \in \mathcal{E}_\infty$. *Si* f *est nulle sur* $\mathbb{N}$ *et s'il existe* $0 < c < e$ *tel que* $M_r(f) = O(c^r)$ *lorsque* r *tends vers* $+\infty$ *montrer que* $f \equiv 0$. *(On pourra par exemple si* $f \not\equiv 0$ *appliquer ce qui précède avec* $k := \min\{i \in \mathbb{N} : f^i(0) \neq 0\}$, $r = p$, $z_1 = 1, \dots, z_p = p$ *puis faire tendre* p *vers* $+\infty$*).)*

Un théorème de Pólya : *ici* $f \in \mathcal{E}_\infty$.

• **Majoration de** $\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(k)\right|$. *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et un réel* $r > n$.

(1) *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $R_n(X) = \dfrac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$.

(2) *Montrer que* $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\dots(re^{it}-n)} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k)$.

(3) *En déduire* $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k)\right| \leq \dfrac{n! M_r(f)}{(r-1)\dots(r-n)}$.

• **Démonstration du théorème.** *on suppose maintenant que* f *vérifie* $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *&* $M_r(f) = o(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}})$ *lorsque* r *tends vers* $+\infty$. *On va montrer qu'alors* f *est polynomiale, c'est le* **théorème de Pólya**.

(1) *En choisissant* $r = 2n+1$ *dans le paragraphe précédent, montrer qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall\, n \geq N \ : \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = 0.$$

(2) *Conclure. Pour cela vous pouvez utiliser le résultat suivant qui était établi dans la première partie du problème : "Soit* $(u_j)_j$ *une suite dans* $\mathbb{C}$*. Il y a équivalence entre*

$$\Big(\exists\, P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tel que } \forall\, j \in \mathbb{N} \ : \ P(j) = u_j\Big) \text{ et } \Big(\forall\, i \in \mathbb{N} \ : \ i \geq n+1 \implies \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j = 0.\Big)"$$

L'exemple de $f(z) = 2^z$ *montre que la condition asymptotique* $M_r(f) = o(\frac{2^r}{\sqrt{r}})$ *n'est pas loin d'être optimale*

Exercice 101.

Exercice 102.

Exercice 103.

Exercice 104.

Exercice 105.

Exercice 106.

Exercice 107.

Exercice 108.

Exercice 109.

Exercice 110.

25 avril 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
E-mail address: lassere@picard.ups-tlse.fr