L1 PCP – UPS 2008
Liste de questions de cours – mai 2008

ALGÈBRE

(1) Enoncé du théorème du rang

(2) Enoncé du théorème de la base incomplète

(3) Définition de somme directe d'espaces vectoriels ; énoncé et démonstration de : deux espaces vectoriels sont en somme directe dans E ssi leur intersection est nulle et leur somme est E.

(4) Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.

(5) Démonstration : une application linéaire $f : E \to F$ vérifie $f(0_E) = 0_F$ et $f(-v) = -f(v)$ pour tout $v \in E$.

(6) Énoncé et démonstration : Une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est bijectif ssi f est injectif ssi f est surjectif.

(7) Énoncé de la formule du changement de base.

(8) Énoncé et démonstration : le déterminant de n vecteurs colonnes change de signe si l'on échange deux vecteurs colonnes.

(9) Énoncé : formule du déterminant du produit de deux matrices carrées.

(10) Énoncé et démonstration : une matrice carrée est inversible ssi son déterminant est non nul ; dans ce cas $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(11) Énoncé et démonstration : le déterminant d'une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$. En conséquence le déterminant d'un endomorphisme f est bien défini par $\det(f) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque.

(12) Énoncé et démonstration : un système $Ax = b$ où A est une matrice carrée à m lignes et n colonnes, x est un vecteur colonne inconnu à n composantes et b un vecteur colonne à m composantes, admet une solution ssi $b \in \mathrm{Im}(A)$. De plus, si c'est le cas, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donné par $\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_0$ où x_0 est une solution particulière de $Ax = b$ et $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Ker}(A)$.

ANALYSE

(1) Démonstration : soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors $\ell \geq 0$.

(2) Énoncé et démonstration du théorème des gendarmes.

(3) Définition de la limite et de la continuité d'une fonction en x_0.

(4) Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

(5) Démonstration : si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

(6) Démonstration : si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

(7) Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.

(8) Énoncé et démonstration du théorème des accroissements finis.

(9) Énoncé de la formule de Taylor-Lagrange : soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

(10) Énoncé de la formule de la dérivée n^{eme} d'un produit de fonctions dérivables.

(11) Définition d'un développement limité.

(12) Énoncé et démonstration du théorème fondamental de Taylor-Young : soit I un intervalle ouvert contenant x_0. Une fonction f de classe C^{n+1} sur I admet en x_0 le développement limité

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

oì ε est un fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. En particulier, une fonction f de classe C^{n+1} sur I admet un DL à l'ordre n en tout point $x_0 \in I$.

(13) Développements limités des fonctions usuelles en 0.

(14) Énoncé et démonstration : une fonction est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

(15) Énoncé et démonstration : "on peut multiplier deux équivalents".

(16) Primitives des fonctions usuelles dans leur domaine de définition respectif.

La liste de questions de cours ci-dessus est valable pour l'examen terminal de la session 2008. Deux questions de cours sont prévues pour l'examen du 19 mai 2008. Les questions de la liste ont été traitées en cours ou en TD. Pour plus de détails, s'adresser à :

Florian Deloup : `deloup@math.univ-toulouse.fr`
Patrice Lassere : `lassere@math.univ-toulouse.fr`
Pierre Maréchal : `marechal@math.univ-toulouse.fr`