◕ L2 PCP – Préparation à l'oral : Intégrales à Paramètres. ◕

◕ ☢ ◕

Exercice 1. *Soit* $f(x) = \int_0^\infty \frac{arctan(xt)}{t(t^2+1)}dt$*. Montrer que* f *est est de classe* C^1 *sur son domaine de définition, à l'aide de* f' *expliciter* f*.*

Exercice 2. *Soit* $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$*, on pose :* $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)}dt$*. Quel est le domaine de définition de* g *? En quels points de* $[0, 5[$ *(s'il en existe...),* g *atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?*

Exercice 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ *bornée et telle que* $f(0) \neq 0$*.*

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$*, l'intégrale impropre* $a_n := \int_0^\infty \frac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}dt$ *est convergente.*

2) Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

3) Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}f(0)$*.*

Exercice 4. *1) Quelle est la nature de l'intégrale impropre* $\int_0^1 \frac{\log(t)}{1-t}dt$ *?*

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{\log(t)}{t}dt = -\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}$*.*

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{1_-}{\sim} \frac{\pi^2}{6(1-x)^2}$ *(utiliser la décroissance pour* $0 < x < 1$ *de* $t \mapsto \frac{tx^t}{1-x^t}$ *pour obtenir un encadrement de* f*...).*

Exercice 5. *Calcul de l'intégrale de Gauss* $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$*. On considère l'application* $f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$*.*

1) Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$*.*

2) En déduire que f *est solution d'une équation différentielle.*

3) Montrer que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxiliaire* $g(t) = e^{-t}f(t)$*...).*

Exercice 6. *Soit* $f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$*. Quel est le domaine de définition de* f *? Montrer que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$*, puis plus précisément montrer qu'au voisinage de* $+\infty$ *on a* $f(x) = 1 + o(1/x)$*.*

Exercice 7. *1) Montrer que pour tout* $x > 0$ *:*

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$*.*

Exercice 8. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(0) = 0$ *et* $f(x) = \int_0^x \sin(1/t)dt$ *si* $x \in \mathbb{R}^\star$*. Montrer que* f *est continue à l'origine, y est-elle dérivable ?*

Exercice 9. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^\star$*,* $x \in [0, 1]$ *:* $g_n(x) = \sin(nx)$ *Montrer que la suite* $(g_n)_n$ *n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers* 0 *sur* $[0, 1]$*.*

---

16 juin 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr