Université Paul Sabatier **Jeudi 17 juin 2010**

☯ L2 PCP – Préparation à l'oral : Séries de Fourier. ☯

☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ (continue et 2π-périodique...). Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls ; montrer que f est identiquement nulle.*

Exercice 2. *A l'aide de la fonction $f(t) = \exp(e^{it})$ montrer que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos(\theta)}d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2}$.

Exercice 3. *Soient $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et posons $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)c_n(g)e^{inx}$. Montrer que h est bien définie, $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et est développable en série de fourier.*

Exercice 4. *Existe-t'il $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ *?*

Exercice 5. *Montrer que $f(x) = \sin^3(x)$ est développable en série de fourier et préciser ce développement.*

Exercice 6. *Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,\pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et* $\displaystyle\int_0^{\pi} f'^2(t)dt = 1$. *Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_1^{\infty}$ de réels vérifiant*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\sin(nx), \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 7. *Soit $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ et*

$$\left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

1er juin 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr