Université Paul Sabatier **Mardi 8 juin 2010**

L2 PCP – Préparation à l'oral : Suites et séries de fonctions.

Exercice 1. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = Arctan(x/n)$.*

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?

2) Montrer que la suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $f_n(x) = nf(x+n^{-1}) - f(x))$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f'. Par un exemple, montrer que l'hypothèse de continuité uniforme sur f' est essentielle.*

Exercice 3. *1) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$: $\sin(x) \geq 2x/\pi$.*

2) Montrer que la fonction f définie par $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f n'est pas dérivable à l'origine.

Exercice 4. *Quel est la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où a_n est la n-ième décimale de π ($\pi \notin \mathbb{Q}$...) ?*

Exercice 5. *1) Etudier (SCV, UCV, NCV...) la série de fonctions $f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{|x|}{x^2+n^2}$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

2) Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^\star)$ et étudier en détail la dérivabilité de f à l'origine.

3) Mêmes questions avec $g(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-n|x|}}{1+n^2}$

Exercice 6. *Etudier la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 7. *On pose $f(x) = \sum_{k\geq 0} e^{-k}\cos(k^2 x)$.*

1) Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; puis, que $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sum_{k\geq 0} e^{-k}(k^2)^{2n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. f est-elle développable en série entière à l'origine ?

2) Même question avec $g(x) = e^{-1/x^2}$, $x \in \mathbb{R}^\star$, $g(0) = 0$.

1[er] juin 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr