Université Paul Sabatier **04 Juin 2010**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Intégrales Impropres. ☯

☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Convergence et convergence absolue de* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ *(pour* $0 < \alpha \leq 1$ *on pourra minorer* $\sum_{k=1}^{N}\int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}dt$*)..*

Exercice 2. *Préciser la nature des intégrales impropres suivantes :*

$$\int_1^\infty \frac{(\cos(x^{-1}))^x - 1}{x^\alpha}dx,\ \alpha \in \mathbb{R},\quad \int_0^\infty \left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x+2}\right)dx,\quad \int_2^\infty \frac{x^{\log(x)}}{\log^x(x)}dx,\quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

Exercice 3. *Pour* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^\star)$ *croissante et* $k \in \mathbb{N}$*, On se propose de montrer que*

$$\left(\int_0^\infty \frac{t^k}{f(t)}dt \quad \texttt{converge}\right) \iff \left(\int_0^\infty \frac{t^k}{f(t)+f'(t)}dt \quad \texttt{converge}\right).$$

1) Montrer la condition suffisante $(\Rightarrow)$.

2) Pour l'autre implication remarquer que $\int_1^X \frac{t^k}{f(t)}dt = \int_1^X \frac{t^k}{f(t)+f'(t)}dt + \int_1^X \frac{t^k f'(t)}{f(t)[f(t)+f'(t)]}dt$ *et traiter le cas* $k = 0$*. Ensuite faire une récurrence sur* k*...*

Exercice 4. *Soit* $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *continue, dérivable à l'origine et telle que* $f(0) = f'(0) = 0$*. Montrer que* $\int_0^1 f(t)t^{-3/2}dt$ *converge.*

Exercice 5. *Existence et calcul de* $\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}dt$*, même question avec .* $\int_1^\infty \left(Arcsin(x^{-1}) - x^{-1}\right)dx$*.*

Exercice 6. *Pour quels couples* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ *l'intégrale impropre*

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}}\right)dx$$

converge ?

Exercice 7. *Convergence et convergence absolue de* $\int_0^{+\infty} t\sin(t^3 - t)dt$*.*

31 mai 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr