Université Paul Sabatier **04 Juin 2010**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral : Suites et Séries. ☯

☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Existe-t-il* $f\ :\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ *deux fois continuement dérivable et telle que :*
$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)\quad \textit{converge}\quad \&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\quad \textit{diverge ?}$$

Exercice 2. *Préciser selon les valeurs de* $\alpha\in\mathbb{R}$ *la nature (divergence, convergence, convergence absolue) de la série de terme général* $a_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$. *Chercher un équivalent du module de la suite de terme général* $v_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ *; tends-elle en module vers zéro en décroissant ?*

Exercice 3. *Pour* $n\in\mathbb{N}$ *on pose* $a_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1) Montrer successivement que $(a_n)_n$ *est décroissante, convergente de limite nulle.*

2) Montrer que pour $n\geq 2\ :\ a_n\geq\frac{1-2^{1-n}}{n-1}$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n$ *?*

3) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}\ :\ a_n=2^{-n}+4n(a_n-a_{n+1})$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n/n$ *?*

Remarque : on peut montrer que $a_n\sim C\cdot n^{-1/4}$ *où* C *est une constante explicite, je le rédigerai peut-être...*

Exercice 4. *On pose pour* $n\in\mathbb{N}^\star$, $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ *il existe un unique réel positif* $a_n\in\mathbb{R}_+$ *tel que* $f_n(x)=0$.

2) Montrer que pour $n\geq 2$ *:* $0<a_n<1$.

3) Montrer que la suite $(a_n)_n$ *est décroissante. Conclusion ?*

4) Montrer que pour tout $n\geq 2\ :\ 2a_n-1=a_n^{n+1}$.

5) En déduire que $\lim_n a_n=1/2$.

6) Montrer que $a_n\sim\frac{1}{2}+2^{-n-2}$.

Exercice 5. *1) Pour* $a\in\{1,2,3,\dots,9\}$ *on pose* $aa\dots a=10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+a$ *(il y a bien entendu* n *« a »...) ; calculer :*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a+aa+\cdots+aa\dots a}{10^n}.$$

2) Si $(a_n)_n$ *est une suite arithmétique à termes tous non nuls, calculer :*
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right).$$

Exercice 6. *Soit* $(a_n)_n$ *une suite réelle. Si* $\lim_n a_n^2=1$ *et* $|a_{n+1}-a_n|<1,\ \forall\,n\in\mathbb{N}$, *montrer que* $(a_n)_n$ *converge vers* ±1. *Peut-on se passer d'une des deux hypothèses ?*

Exercice 7. *Pour* $n\in\mathbb{N}^\star$ *on définit* a_n *comme le plus petit entier tel que*
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n}>1.$$

1) Montrer que la suite $(a_n)_n$ *est bien définie.*

2) Montrer que $2n-1<a_n<3n-2$ *; si la suite* $(a_n/n)_n$ *converge encadrer sa limite* λ.

3) Montrer que $1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq 1++\frac{1}{a_n}$.

4) Montrer que $1-\frac{1}{n}<\int_n^{a_n}\frac{dt}{t}<1$ *en déduire* λ.

Exercice 8. *Soient* $e=\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}+r_n$.

1) On suppose que $e=p/q\in\mathbb{Q}$. *Montrer que* $q!r_q\in\mathbb{N}^\star$ *en déduire que* $e\notin\mathbb{Q}$.

2) (Autre preuve) Montrer que $1/n+1<n!r_n<1/n$, *en déduire que* $\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$ *puis que* $e\notin\mathbb{Q}$.

---

30 mai 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr