L2 PCP ~ Préparation à l'Oral : Suites et Séries ~ Juin 2010

Exercice 1 : Supposons qu'une telle fonction f existe, étant deux fois dérivable on peut lui appliquer Taylor-Lagrange sur $[0,1/n]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\star) \quad \exists\, 0<\xi_n<1/n \ : \ f(1/n) = f(0) + f'(0)/n + f''(\xi_n)/2n^2$$

En outre, $\sum_n f(1/n)$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} f(1/n) = 0$ et f étant continue à l'origine : $f(0)=0$

Comme de plus $f \in C^2$, f'' est bornée sur $[0,1]$, par conséquent : $\exists C>0 \ : \ |f''(\xi_n)/2n^2| \leq C/2n^2$

Ainsi $(\star) \iff f(1/n) = f'(0)/n + f''(\xi_n)/2n^2 \quad (\Delta)$

⇝ Si $f'(0)=0$ alors $f(1/n) = f''(\xi_n)/2n^2$ puis $|f(1/n)| \leq C/2n^2$ d'où l'ACV de $\sum_n f(1/n)$ ce qui est contraire aux hypothèses

⇝ si $f'(0)\neq 0$, alors vu ce qui précède :

$$f(1/n) = f'(0)/n + f''(\xi_n)/2n^2 = f'(0)/n + o(1/n)$$

ie $f(1/n) \underset{+\infty}{\sim} f'(0)/n$ terme général d'une série divergente de signe constant : par th. de comparaison : $\sum_n f(1/n)$ DV ce qui est absurde

Conclusion : Une telle fonction ne peut exister

Exercice 2 : $a_n = (-1)^n/(n^\alpha + (-1)^n)$. Si $\alpha \leq 0$ la divergence est grossière. On suppose donc $\alpha>0$

La série est alternée (tends vers zero mais le $(-1)^n$ au dénominateur rends suspecte la décroissance il faut donc procéder autrement (essayez !) pour déterminer la nature de cette série. Classiquement on va utiliser les DL pour écrire a_n sous la forme de la somme u_n+v_n de deux termes généraux de séries plus sympathiques :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$1/_{1+u} = 1-u+o(|u|)$ si $u \to 0$....

soit :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = u_n + v_n$$

avec :

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ terme general d'une $\sum$ CV $\forall \alpha>0$ (th. séries alternées)

$v_n = -\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ terme general serie CV $\iff \alpha > 1/2$

$\underset{+\infty}{\sim} -1/n^{2\alpha}$ (th. Comp. + Riemann).

Enfin, comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n/n^\alpha$: $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} 1/n^\alpha$ la CV sera absolue ssi $\alpha>1$

En résumé :

- $\alpha \leq 1/2$: $\sum_n a_n$ DV
- $1/2 < \alpha \leq 1$ $\sum_n a_n$ CV mais pas absolument.
- $\alpha > 1$ $\sum_n a_n$ ACV

En particulier si $\alpha = 1/2$, $a_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$ et $\sum a_n$ DV donc $|a_n| \sim 1/\sqrt{n}$ ne tends pas vers 0 en décroissant (sinon TSA...) la monotonie ne passe donc pas à l'équivalent

Exercice 3 : $a_n = \int_0^1 dt/(1+t^4)^n$.

① comme $\forall n \geq 1$ $(1+t^4)^{n+1} \geq (1+t^4)^n$ on passe à l'inverse on intègre : $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$

La suite $(a_n)_1^\infty$ est décroissante minorée donc convergente ; en outre $0 \leq 1/(1+t^4)^n \leq 1/(1+t^4) \in L^1([0,1])$ donc par CVD ou monotone :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n} = 0$$

② Pour $t \in [0,1]$ et $n \geq 2$ on a $1/(1+t^4)^n \geq 1/(1+t)^n$

Soit : $a_n \geq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} = \left[-\frac{(1+t)^{-n+1}}{n-1}\right]_0^1 = \frac{1-2^{-n+1}}{n-1}$

et comme $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ les théorèmes de comparaison pour les séries à termes ≥ 0 assurent la divergence de $\sum_n a_n$.

③ $a_{n+1} = \int_0^1 \frac{1+t^4}{(1+t^4)^{n+1}}dt - \int_0^1 \frac{t^4\,dt}{(1+t^4)^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{(1+t^4)^n}\right)'$

$$= a_n + \int_0^1 t\left(\frac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}\right)\frac{dt}{4n}$$

$$\overset{IP}{=} a_n + \frac{1}{4n}\left\{2^{-n} - \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}\right\} = a_n + (2^{-n} - a_n)\frac{1}{4n}$$

Soit

$$a_n = 4n(a_n - a_{n+1}) + 2^{-n}$$

On en déduit que $\frac{a_n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n2^n}}_{u_n} + \underbrace{4(a_n - a_{n+1})}_{v_n}$

la série $\sum u_n$ est CV (facile) et sa somme vaut $\log 2$ (voir le DSE de $\log(1+x)$...)

Pour la seconde on a pour $N \geq 2$: quest° ①

$$\sum_1^N (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} a_1 \text{ car } \lim a_N = 0$$

Donc $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} = \log 2 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pi + \log(1+\sqrt{2})\right)$$

Exercice 4 : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ $\quad n \geq 1$

① $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n-1 \geq 0$. Par le TVI on est assuré que f_n s'annule sur $[0,1)$. En outre si $x \in \mathbb{R}^+$:

$f_n'(x) = nx^{n-1} + \dots + 1 \geq 1 > 0$ & $f_n(0) = -1$ & $f_n(1) = n-1$

f_n est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et admet un unique zéro $0 < a_n < 1$, $n \geq 2$.

③ On peut remarquer que $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0 = a_{n+1}^{n+1} + f_n(a_{n+1})$ et par suite $f_n(a_{n+1}) < 0$, avec les variations de f_n vues en ① : $0 < a_{n+1} < a_n$: la suite $(a_n)_1^\infty$ décroissante positive est convergente.

④ Pour $x \neq 1$ on peut écrire :

$$f_n(x) = x^n + \dots + x + 1 - 2 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$$

Donc $f_n(a_n) = \frac{1-a_n^{n+1}}{1-a_n} - 2 = 0$ i.e. $\boxed{2a_n - 1 = a_n^{n+1}}_{n \geq 2}$

(Δ)

(5) Nous avons $2a_n - 1 = a_n^{n+1}$. Or vu (2)

$0 < a_n \le a_2 < 1$: $0 < a_n^{n+1} \le a_2^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (☆)

la suite $(a_n^{n+1})_n$ converge donc vers 0 soit

$\lim_{n\to\infty} 2a_n - 1 = 0$ ie $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$

$\log(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

(6) $\log(2a_n)^{n+1} = (n+1)\log(2a_n)$

$= (n+1)\log(2a_n - 1 + 1) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)(2a_n-1) = (n+1)a_n^{n+1}$

Nous avons donc :

$\log(2a_n)^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} (n+1)a_n^{n+1}$

mais (☆) implique que $\lim_{+\infty}(n+1)a_n^{n+1} = 0$

soit $\lim_{+\infty}(2a_n)^{n+1} = 1$ ie $a_n^{n+1} \sim 2^{-n-1}$

en reportant dans (Δ) : $\boxed{a_n - \frac{1}{2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}}$

Exercice 5 : (1) Nous avons :

$a + aa + aaa + \dots + \underbrace{aa..a}_{n} = a(1 + 11 + \dots + 11\dots1)$

$= a\left(1 + (1+10) + (1+10+10^2) + \dots + (1+10+\dots+10^{n-1})\right)$

$= a\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9}\right)$

$= a\left(\frac{10}{9}(1+10+\dots+10^{n-1}) - \frac{n}{9}\right)$

$= a\left(\frac{10}{9}\cdot\frac{10^n-1}{9} - \frac{n}{9}\right) = a\,\frac{10(10^n-1)-9n}{81}$

Donc $\frac{a+aa+\dots+a\dots a}{10^n} \to \frac{10a}{81}$

(2) $a_{k+1} = a_k + d = a_0 + kd$

$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}} = \frac{d}{a_ka_{k+1}}$ donc par télescopage :

$\frac{1}{a_1a_2} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \longrightarrow \frac{1}{a_1 d}$

Exercice 6 : On choisit $0<\varepsilon<1/2$. Comme $\lim_{+\infty} x_n^2 = 1$

il existe n_0 : $n \ge n_0 \Rightarrow |x_n^2 - 1| \le \varepsilon^2$

$\Rightarrow n\ge n_0$: $|x_n - 1| \le \varepsilon$ ou $|x_n+1| \le \varepsilon$ $(\star)_n$

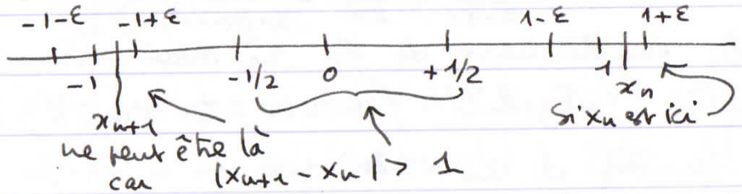
Supposons que $|x_n - 1| \le \varepsilon$, alors forcément $|x_{n+1}-1| \le \varepsilon$

en effet, sinon $(\star)_{n+1} \Rightarrow |x_{n+1}+1| \le \varepsilon$

et alors $|x_{n+1} - x_n| = |-2 + x_{n+1} + 1 - x_n + 1|$

$\ge 2 - |x_{n+1}+1| - |x_n - 1| \ge 2 - \varepsilon - \varepsilon > 1$ car $0<\varepsilon<1/2$

Avec un dessin c'est très clair :



Nous venons donc de démontrer que $\forall\, 0<\varepsilon<1/2$ $\exists N$

tq ou bien $|x_n - 1| \le \varepsilon$ $\forall n \ge N$

ou bien $|x_n + 1| \le \varepsilon$ $\forall n \ge N$

ie ou bien $\lim_{+\infty} x_n = 1$ ou bien $\lim_{+\infty} x_n = -1$.

Exercice 7 : (1) Par divergence de la série harmonique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}$ croît vers $+\infty$ lorsque k tends vers $+\infty$, par conséquent pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\exists\, a_n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > n$: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \le 1$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$

La suite a_n est bien définie.

(2) Il s'agit de montrer que (vu la définition de a_n)

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} > 1$

Par cela, on fait une récurrence :

Si $n=2$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}<1$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}>1$$

C'est donc vrai pour $n=2$. Supposons l'assertion vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$:

$$\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2(n+1)-1}=\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n+1}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{2n-1}}_{<1}+\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}}_{=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=\frac{-1}{2n(2n+1)}<0}<1$$

On procède exactement de la même manière pour l'autre inégalité : Par réc. c'est vrai $\forall n\geq 1$.

Ainsi vu la déf de a_n : $2n-1\leq a_n\leq 3n-2$

ie $\frac{2n-1}{n}\leq\frac{a_n}{n}\leq\frac{3n-2}{n}$

en particulier, si $\frac{a_n}{n}$ converge vers l : $\boxed{2\leq l\leq 3}$

③ Vu que $1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{a_n}$

et par comparaison intégrale série :

$$\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{a_n}<\int_n^{a_n}\frac{dt}{t}<\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{a_n-1}\leq 1$$

on a

$$1-\frac{1}{n}<\log\left(a_n/n\right)<1$$

Soit (gendarmes) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=e$ CQFD

Exercice 8 : $e=\sum_0^\infty\frac{1}{k!}=1+\dots+\frac{1}{n!}+r_n$

① Si $e=p/q\in\mathbb{Q}$ alors $q!(e-r_q)=q!\left(2+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)$
qui est bien un entier non nul

En outre $0<q!\left(e-\sum_0^q\frac{1}{k!}\right)$ est bien entendu un entier

et $0<q!\left(e-\sum_0^q\frac{1}{k!}\right)=q!\sum_{q+1}^\infty\frac{1}{k!}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\dots$

$$<\frac{1}{1+q}+\frac{1}{(1+q)^2}+\frac{1}{(1+q)^3}+\dots=\frac{1+q}{(1+q)q}=\frac{1}{q}$$

Comme $q\geq 2$ (pourquoi ?) il s'agit donc d'un entier situé dans $]0,1/2[$ ce qui est absurde et $e\notin\mathbb{Q}$.

② Nous avons vu au dessus que $q!r_q<1/q$. De l'autre coté $q!r_q=\frac{1}{q+1}+\dots>\frac{1}{q+1}$ ie

$$\frac{1}{n+1}<n!r_n<\frac{1}{n}$$

puis $n(n!)r_n\underset{+\infty}{\sim}1$

Par conséquent

$$n\sin(2\pi e\,n!)=n\sin(2\pi r_n\,n!)$$

$$=\underbrace{\frac{\sin(2\pi r_n n!)}{2\pi r_n n!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1\text{ car }2\pi r_n n!\to 0\text{ vu}}\;2\pi\underbrace{r_n\,n!\,n}_{\to 1\text{ vu}}$$

Maintenant, si e était rationnel cette limite serait clairement nulle : $e\notin\mathbb{Q}$