Université Paul Sabatier **28 Mai 2010**

☯ L2 PCP – Préparation à l'oral : Algèbre Linéaire, Réduction des Endomorphismes. ☯

☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1.*

1) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle A est d'allure simple et en déduire que $\det(A+I_n) = \text{trace}(A)+1$.

2) Quel est le polynôme caractéristique de A ? En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\text{trace}(A) \neq 0$.

3) Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $A = ((\omega^{k+l}))_{0\leq k,l\leq 4} \in M_5(\mathbb{C})$. A est-elle diagonalisable ? Que vaut $\exp(A)$?

Exercice 2. *Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A^N = I_2$.*

1) Montrer que A est inversible et diagonalisable.

2) Que dire des valeurs propres de A ?

3) Si les valeurs propres de A sont réelles montrer que $A^2 = I_2$.

3) Etudier le cas où elles ne sont pas réelles.

4) Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 3. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$. Si 1 et -1 sont valeurs propres de A, montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 4. *Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3-3A^2+2A = 0$ et $\text{trace}(A) = 8$. Quel est le polynôme caractéristique de A ? montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4+A^3+2A^2+A+I_n = 0$. Montrer que n est pair, que A est diagonalisable et que $\text{trace}(A) \in -\mathbb{N}$.*

Exercice 6. *Pour $f \in \mathscr{C}([0,1])$ on considère l'application $L(f) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$L(f)(x) = \begin{cases} f(0) & si \ \ x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & si \ \ x \in]0,1]. \end{cases}$$

1) Montrer que L est bien un endomorphisme de $\mathscr{C}([0,1])$.

2) Valeurs propres et sous-espaces propres de L, commentaire ?

Exercice 7. *Soient $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $aA+bB+cC$ possède une valeur propre double.*

1) Traiter le cas où la famille $\{A,B,C\}$ est libre dans $M_3(\mathbb{R})$

2) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$?.

3) En déduire le cas général.

Exercice 8. *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ on pose : $\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi(A) = -A + tr(A)I_n$.*

1) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$.

2) Soit λ une valeur propre de φ. Montrer que $\lambda = -1$ ou $n-1$.

3) Montrer que le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est l'ensemble $\mathscr{R}$ des matrices de trace nulle. Déterminer sa dimension grâce au théorème du rang convenablement appliqué.

4) Montrer que le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = n-1$ est une droite.

5) φ est-elle diagonalisable ?

26 mai 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr