28 Mai 2010 – L2 Prépa Concours – Préparation à l'Oral : Algèbre Linéaire
— Corrigé des Exercices —

Exercice 1

1) Par hypothèse A est de rang 1, donc via le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}(A) = n-1$. Considérons alors $e_1 \dots e_{n-1}$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$, par le théorème de la base incomplète il existe $e_n \in \mathbb{C}^n$ tel que $\{e_1 \dots e_n\} = \mathcal{B}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Vu le choix des vecteurs e_i la matrice A est dans la base $\mathcal{B}$ de la forme $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$
Bien entendu l'identité ne dépend pas du choix de la base : $\det(A+I_n) = \det(P^{-1}(A+I_n)P) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \\ 0 & & 0 & 1+a_n \end{vmatrix}$
$= a_n + 1 = \mathrm{tr}(A) + 1$ puisque la trace ne dépend pas du choix de la base.

2) Le polynôme caractéristique de A est celui de $A' = P^{-1}AP$ soit $\chi_A(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1}(\mathrm{tr}(A) - x)$ résultat que l'on pouvait déduire uniquement du fait que $\mathrm{rg}(A) = 1$ (..). Deux cas peuvent donc se produire :

- $\mathrm{tr}(A) = 0$ dans ce cas $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$: A admet 0 comme unique vp. Le sous espace propre associé est $E_0 = \mathrm{Ker}(A)$, il est de dimension $n-1 < n$ mult. A n'est donc pas diagonalisable. (ou bien : si A est diago. alors A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$ mais alors $\mathrm{rg}(A) = 0$ ...)
- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$: $\chi_A(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1} (\mathrm{tr}(A) - x)$
A admet donc deux valeurs propres 0 et $\mathrm{tr}(A)$ de mult. respectives $n-1$ et 1. Le sous espace propre E_0 est $\mathrm{Ker} A$ de dim $n-1$ et $E_{\mathrm{tr}(A)}$ est obligatoirement de dimension 1 (car $1 \leq \dim E_\lambda \leq$ mult..)
En résumé la dim. des sous espaces propres est égale à la mult. des racines dans le pol. caract. donc A est diagonalisable.

3) On a :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 \\ \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 & \omega^8 \end{pmatrix}$$
les colonnes de A sont toutes proportionnelles A est donc de rang $=1$

ou ce qui précède elle sera diagonalisable si et seulement si $tr(A) \neq 0$. Or

$$tr(A) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 = \frac{1 - \omega^{2(4+1)}}{1 - \omega^2} = 0$$

A n'est donc pas diagonalisable.

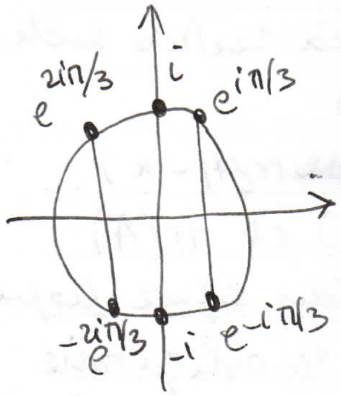
Exercice 2 :

1) A est annulée par le polynôme $X^N - 1$ scindé à racines simples : elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$

2) Ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont des racines de $X^N - 1$ donc des racines de l'unité. En outre A étant à coefficients réels il en est de même de son polynôme caractéristique χ_A et par suite ses racines sont conjuguées si elles ne sont pas réelles.

3) Vu (2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \{\pm 1\}$, A étant diagonalisable $A^2 = I_2$

4) Sinon : $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \notin \mathbb{R}$. En outre A étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $tr(A) \in \mathbb{Z}$ mais $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 2re(\lambda_1) \in [-2, 2]$ car ce sont des racines de l'unité ie



$2re\lambda_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$: $re(\lambda_1) \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow re(\lambda_1) = -1/2 \Rightarrow Im(\lambda_1) = \pm\sqrt{3}/2$

$\Rightarrow re(\lambda_1) = 0 \Rightarrow Im(\lambda_1) = \pm 1$

$\Rightarrow re(\lambda_1) = 1/2 \Rightarrow Im(\lambda_1) = \pm\sqrt{3}/2$

Soit des racines troisième, quatrième ~~ou~~ de l'unité : dans tous les cas $\lambda^{12} = 1$ CQFD

Remarque : Les matrices suivantes dans $GL_2(\mathbb{Z})$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'ordre respectifs 1, 2, 3, 4, 6, ∞

ce sont donc les seuls ordres possible d'un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ (bonus $A \in GL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow A^{-1} \in GL_2(\mathbb{Z})$ ....)

Exercice 3 :

$A \in M_3(\mathbb{R})$ et vérifie $A^4 = A^2$.
A annule le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ le spectre de A est par conséquent inclus dans $\{-1, 0, 1\}$
Supposons donc que $\pm 1 \in sp(A)$ il reste une valeur propre :

- ou bien $0 \in Sp(A)$ et par conséquent A admet trois vp distinctes : A est diagonalisable et $\chi_A(x) = -x(x-1)(x+1)$
- ou bien $0 \notin sp(A)$. 1 ou -1 est alors valeur propre de multiplicité 2 pour A ie $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x+1)$ ou $\chi_A(x) = -(x+1)^2(x-1)$ et A sera diago si le sous espace propre associé à la vp double est de dim 2.

Pour se convaincre de cela, il faut observer que $0 \notin Sp(A) \iff A \in GL_3(\mathbb{R})$: A est donc inversible et par suite l'équation $A^4 = A^2$ se simplifie en $A^2 = I_3$ ie le poly. scindé à racines simples $X^2 - 1$ est annulé par A qui est diagonalisable CQFD.

Exercice 4 :

$A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $tr(A) = 8$; il s'agit de déterminer le polynôme caractéristique de A. A est annulée par $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ polynôme scindé à racines simples A est donc diagonalisable et $sp(A) \subset \{0, 1, 2\}$
Comme A est inversible $0 \notin Sp(A)$ ie $sp(A) \subset \{1, 2\}$ le polynôme caractéristique de A est donc de la forme $\chi_A(x) = (x-1)^\alpha (x-2)^\beta$ avec $\alpha + \beta = 6$. Mais $tr(A) = \alpha + 2\beta = 8$ car $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$ .. on résout et $\alpha = 4$ $\beta = 2$
ie

$$\chi_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$$

Exercice 5 :

Cette fois-ci $A \in M_n(\mathbb{R})$ et vérifie $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$

Il s'agit de montrer que n est pair & $tr(A) \in -\mathbb{N}$.

A est annulée par $X^4+X^3+2X^2+X+1 = X^4+X^3+X^2+X^2+X+1$

$= (X^2+X+1)(X^2+1) = (X+i)(X-i)(X-j)(X-\underbrace{\bar{j}}_{=j^2})$

C'est un polynôme scindé à racines simple : A est diagonalisable.

A étant à coef réel ses vp non réelles sont deux à deux conjuguées avec m multiplicités ie

$$\chi_A(x) = (x-i)^{\alpha}(x+i)^{\alpha}(x-j)^{\beta}(x-j^2)^{\beta} \qquad \underline{\alpha, \beta \in \mathbb{N}}$$

on a donc $n = 2\alpha + 2\beta$ qui est donc pair

En outre

$$Tr(A) = \alpha i + \alpha(-i) + \beta(j) + \beta(j^2)$$
$$= \beta(j+j^2) = -\beta \in -\mathbb{N} \quad : \underline{\text{CQFD}}$$

Exercice 6 :

1) le seul problème est de montrer que $L(f)$ est continue sur $[0,1]$. f étant continue sur $[0,1]$ les théorèmes classiques sur les intégrales à paramètre assurent la continuité de $L(f)$ sur $]0,1]$

Il reste la continuité en $x=0$: f étant continue

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

Soit donc $0 < x < \delta$:

$$|L(f)(x) - L(f)(0)| = \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(0)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{x}\int_0^x dt = \varepsilon$$

ie $\forall \varepsilon > 0, 0 < x < \delta \Rightarrow |L(f)(x) - L(f)(0)| \leq \varepsilon$

$L(f)$ est bien continue en $x=0$: $L(f) \in C^0([0,1])$

2) Soit $\lambda \in Sp(L)$: $\exists f \in C([0,1]) \setminus \{0\}$ vérifiant :

$L(f) = \lambda f$. En particulier $\lambda f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, $x>0$

f est donc de classe C^1 au moins sur $]0,1]$. On a pour $x \in]0,1]$ $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

soit $\lambda x f'(x) + \lambda f(x) = f(x)$

ie $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0 \quad \forall x \in]0,1]$

- Si $\lambda = 0$: $f \equiv 0$ Sinon on résout l'e.d. :
- Si $\lambda = 1$: $f = cte$

et on trouve $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ et $\lambda \in]0,1]$

En particulier $\lambda > 1$ n'est pas une vp car

la solution f_λ tend vers $+\infty$ en $0+$ et n'est

donc pas continue en $x = 0$

Bilan : $Sp(\lambda) =]0,1]$ et

$E_\lambda = \text{Vect} \langle x \mapsto x^{1-\lambda/\lambda} \rangle$ qui est de dim 1

Exercice 7 :

1) Si la famille A, B, C est liée il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ et CQFD.

2) Sinon $\text{Vect}\{A, B, C\}$ est un sev de dim 3 dans $M_2(\mathbb{R})$ de dim 4 : il se doit donc de rencontrer $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ sev de dim 2 de $M_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices admettant des vp d'ordre 2

Rq : Attention l'ensemble des matrices admettant une vp d'ordre 2 n'est pas un espace vectoriel. Par ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$..

Exercice 8 :

$M_n(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto \varphi(A) = -A + tr(A) I_n \in M_n(\mathbb{R})$

1) la trace est linéaire, φ est donc bien un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2.

2) Soit $\lambda \in Sp(\varphi)$: $\exists A_\lambda$ non nulle vérifiant $\varphi(A_\lambda) = \lambda . A_\lambda$

ie $-A + tr(A) I_n = \lambda . A$ ie $(1+\lambda) A = tr(A) I_n$

$E_{-1} = \{A : tr(A) = 0\} = \text{Ker}[tr]$ de dim $n^2 - 1$ par th. du rang

. Si $tr(A) = 0$ comme $A \neq 0$: $\lambda = -1$ et réciproquement $\lambda = -1 \Rightarrow tr(A) = 0$ donc $\lambda = -1$ est valeur propre de φ le sous espace propre associé E_{-1} étant l'espace des matrices de trace nulle.

. Si $tr(A) \neq 0$ alors $\lambda \neq -1$ et $A = \frac{tr(A)}{1+\lambda} I_n$

soit en prenant la trace : $tr(A) = n \frac{tr(A)}{1+\lambda}$

ie $\lambda = n - 1$ & $A \in \text{Vect} \langle I_n \rangle$

ie $\lambda = n-1 \in Sp(\varphi)$ et E_{n-1} est l'ev de dim 1 Vect I_n

Bilan : On a deux vp -1 et $n-1$ ssp de dim resp. $n^2 - 1$ & 1 de somme $n^2 = \dim M_n(\mathbb{C})$ donc φ est diago. et $\chi_\varphi(x) = (-1)^{n^2} (x+1)^{n^2-1} (x-n+1)$ CQFD