UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - Feuille 7 (Développements limités). ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *1) Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = x/\sin(x)$ *est* $1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$.
2) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = 1/\cos(x)$ *est* $1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$.
3) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\sin(x)/x)$ *est* $e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$.
4) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 7 *de* $f(x) = \cos(x)$.
5) Calculer le DL à l'ordre 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log(\cos(x))$.
6) Calculer le DL à l'ordre 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
7) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 2 *de* $f(x) = \arctan\sqrt{x}$.
8) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 2π *de* $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2}$.
9) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de*$f(x) = \log\left(3e^x + e^{-x}\right)$ *est* $2\log(2) + x/2 + 3x^2/8 - x^3/8 + o(x^3)$.
10) Montrer que le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$ *est* $\log(3) + 5x/12 - 53x^2/576 + o(x^2)$.
11) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$ *est* $\log(2) - x^2/8 - 3x^4/64 + o(x^4)$.
12) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(\log(e+x)\right)$ *est* $x/e - x^2/e^2 + 7x^3/6e^3 + o(x^3)$.
13) Donner un DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (ch(x))^{1/x^2}$ *est* $\sqrt{e} - \sqrt{e^2}x^2/12 + o(x^2)$.
14) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$ *est* $x/\sqrt{e} - x^2/12\sqrt{e} + o(x^3)$.
15) Montrer que le DL à l'ordre 1 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \sqrt{a + \sqrt{b+x}}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ *est* $\sqrt{a+\sqrt{b}} + x\left(4\sqrt{b}\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^{-1} + o(x)$.
16) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 1 *de* $f(x) = x^{-2}\log(1+x)$ *est* $\log 2 + (1/2 - 2\log 2)(x-1) + (3\log 2 - 9/8)(x-1)^2 + (43/24 - 4\log 2)(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
17) Montrer que le DL à l'ordre 7 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\cos(x))$ *est* $e\left(1 - x^2/2 + x^4/6 - 31x^6/720\right) + o(x^6)$.
18) Montrer que le à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$ *est* $(\cos(x))^{\sin(x)} = 1 - x^3/2 + o(x^5)$.

Solution détaillée des DL 5 6 7 et 8 :
5) On a au voisinage de $x = 0$ *:* $\log(cos(x)) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) = \log(1+U)$ *où* $U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ *et comme* $\lim_{x\to 0} U = 0$ *on peut écrire* $\log(cos(x)) = \log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} + o(U^3)$. *Un calcul rapide donne* $U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6), U^2 = \frac{x}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)$, $U^3 = -\frac{x^6}{8} + o(x^6)$ *soit finalement* $\log(cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.
Plus astucieux : en remarquant qu'au voisinage de 0 *:*$f'(x) = -\tan(x) = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ *; en intégrant ce DL on retrouve le résultat précédent.*
6) Comme plus haut f *s'écrit sous la forme* $\log(1+U)$ *avec* $U = \frac{x^2}{1+x}$ *qui tends vers* 0 *avec* x *: on va donc pouvoir composer les DL.* $U = \frac{x^2}{1+x} = x^2(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)) = x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$, *c'est un DL qui commence à l'ordre 2 : il suffit donc de faire un DL de* $\log(1+U)$ *à l'ordre* 3 *:* $\log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} + o(U^3)$, *on remplace et on trouve* $f(x) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.
7) On propose trois solutions. • *On se ramène en* 0 *en posant* $X = x - 2$ *soit* $f(x) = \arctan\sqrt{x} = \arctan\sqrt{X+2} = g(X)$. *On va donc chercher un* $DL_2(0)$ *de* g *:* $g(X) = \arctan\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{X}{2}}$ *et* $\sqrt{1+\dfrac{X}{2}} = 1 + \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)$ *soit* $g(X) = \arctan\sqrt{2}(1 + \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)) = \arctan\sqrt{2}(1+U) = \varphi(U)$ *où* $U = \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)$. *Maintenant* $\varphi'(U) = \frac{\sqrt{2}}{3+4U+2U^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{1+4U/3+2U^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - 4U/3 + o(U))$. *On intégre* $\varphi(U) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}U}{3} - \frac{4\sqrt{2}U^2}{9} + o(U^2)$ *soit* $g(X) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}X + \frac{7\sqrt{2}}{9\cdot 32}X^2 + o(X^2)$ *et finalement* $f(x) = \arctan\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}(x-2) + \frac{7\sqrt{2}}{9\cdot 32}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$.
• *On peut aussi chercher un* $DL_2(2)$ *de* f' *:*$f'(x) = (2\sqrt{x}(1+x))^{-1}$ ($\sqrt{x}^2 = |x| = x$ *car* x *tends vers 2) soit en posant* $X = x - 2$ *:*$(2(1+x))^{-1} = (2\sqrt{X+2}(3+X))^{-1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1+X/2)^{-1}(1+X/3)^{-1} = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{7\sqrt{2}}{12^2}(x-2) + o((x-2))$ *et on intègre....*
• *On peut enfin utiliser Taylor-Young à l'ordre 2 :* $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2 + o((x-2)^2)$ *et on calcule* $f(2), f'(2), f''(2)$ *ce qui finalement n'est pas plus long que le reste...*
8) On effectue le changement $h = x - 2\pi$ *:*$\cos\sqrt{x^2+5\pi^2} = \cos\sqrt{(h+2\pi)^2 + 5\pi^2} = \cos\sqrt{h^2 + 4\pi h + 9\pi^2} = \cos(3\pi\sqrt{1 + \frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2}}) = \cos(3\pi(1 + \frac{1}{2}(\frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2}) - \frac{1}{4}(\frac{4h}{9\pi} + \frac{h^2}{9\pi^2})^2 + o(h^2))$

Exercice 2. *Montrer que*

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3},$$

$$2)\quad \lim_{x\to 2_+}\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan(\pi x/4)}=\exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2)+9\log(3)\right)\right].$$

Solution détaillée : *1) On a* $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2(x)}=\frac{(x^3/6+o(x^3))(2x+o(x^2))}{x^2(x+o(x^2))^2}$ $=\frac{(x^3/6+o(x^3))(2x+o(x^2))}{x^2(x^2+o(x^2))}=\frac{(1/6+o(1))(2+o(x))}{1+o(x)}=\frac{1+o(1)}{3+o(x)}$ *et la limite est* $1/3$.
2) On se ramène à l'origine : $2^x+3^x-12=4\cdot 2^{x-2}+9\cdot 3^{x-2}-12=4e^{(x-2)\log 2}+9e^{(x-3)\log 3}-12=1+(4\log 2+9\log 3)(x-2)+o(x-2)$. *De même* $\tan(\pi x/4)=\tan(\pi(x-2)/4+\pi/2)=-\frac{\cos(\pi(x-2)/4)}{\sin(\pi(x-2)/4)}=-\frac{1-\pi^2(x-2)^2/32+o((x-2)^2)}{\pi(x-2)/4\cdot(1-\pi^2(x-2)^2/6\cdot 16+o((x-2)^2)}=-\frac{4}{\pi(x-2)}(1-\frac{\pi^2}{48}(x-2)^2+o((x-2)^2))$. *On a donc :*$(2^x+3^x-12)^{\tan(\pi x/4)}=\exp(\tan(\pi x/4)\log(2^x+3^x-12))=\exp(-\frac{4}{\pi(x-2)}(1-\frac{\pi^2}{48}(x-2)^2+o((x-2)^2))\times\log(1+(4\log 2+9\log 3)(x-2)+o(x-2)))=\exp(-\frac{4}{\pi}(4\log 2+9\log 3)+o(1))\to\exp(-\frac{4}{\pi}(4\log 2+9\log 3)$ *lorsque* $x\to 2$.