# Petit Corrigé de l'exercice 4 de la feuille 4.

• Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,-2,0,3)$, $v_2 = (2,3,0,-1)$ et $v_3 = (2,-1,2,1)$ forment une famille libre :

c'est classique : la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ sera libre ssi

$$xV_1 + yV_2 + zV_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow x = y = z = 0$$

et $xV_1 + yV_2 + zV_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

soit (système facile à résoudre) : $x = y = z = 0$ et la famille est bien libre. Elle forme donc une base de

$$E = \text{vect}\{V_1, V_2, V_3\}$$
$$= \{xV_1 + yV_2 + zV_3 \ ; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

• c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Le vecteur $V = (3,9,-4,-2)$ sera dans E ssi il peut s'écrire sous la forme $V = xV_1 + yV_2 + zV_3$ (et cette décomposition sera alors unique) en regardant les composantes on est conduit au système :

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = 9 \\ 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$$

le système est facile à résoudre, on trouve $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$

<u>Conclusion</u> : $V \in E$ et $V = V_1 + 3V_2 - 2V_3$

---

<u>Remarque</u> : il y avait une coquille dans la feuille où $v_2 = (2,3,0,1)$, vous pouvez bien entendu reprendre cet exercice avec le vecteur $v_2 = (2,3,0,1)$ ce qui revient à changer la dernière équation de $(S)$ en $3x + y + z = -2$ il est possible qu'il n'y ait pas de solution dans ce cas...

# Petit Corrigé de l'exercice 5 de la feuille 4.

$$F = \mathrm{Vect}\{v_1 = (1,-1,0,2),\ v_2 = (2,1,3,1)\} = \{xV_1 + yV_2,\ x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \mathrm{Vect}\{w_1 = (1,1,1,1),\ w_2 = (3,-4,4,2)\}$$

les deux familles $\{v_1, v_2\}$ et $\{w_1, w_2\}$ sont libres : F et G sont donc deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$. Leur intersection (qui est un sev) sera donc de dimension 0, 1 ou 2. Déterminons $F \cap G$ :

$V \in F \cap G \iff \exists x, y, z, t \in \mathbb{R} : xV_1 + yV_2 = V = zW_1 + tW_3$

ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} x + 2y = z + 3t \\ -x + y = z - 4t \\ 3y = z + 4t \\ 2x + y = z + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z - 3t = 0 \\ -x + y - z + 4t = 0 \\ 3y - z - 4t = 0 \\ 2x + y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z - 3t = 0 \\ 3y - 2z + t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3y - z - 4t = 0 \\ -3y + z + 4t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z - 3t = 0 \\ 3y - 2z + t = 0 \\ 3y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z - 3t = 0 \\ 3y - 2z + t = 0 \\ z - 5t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 5t,\ y = 3t,\ x = 2t$

$\Rightarrow V = xV_1 + yV_2 = 2tV_1 + 3tV_2 = t(2V_1 + 3V_2) = t(8,1,9,7)$

ou bien :

$= zW_1 + tW_2 = 5tW_1 + tW_2 = t(5W_1 + W_2) = t(8,1,9,7)$

$\Rightarrow F \cap G = \mathrm{vect}\{(8,1,9,7)\}$