

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}.$$

Solutions : 1) : $\{(\lambda, -\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 2) : $\{(\lambda + 1, -1 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 3) : pas de solutions.

Exercice 2. On se propose de calculer lorsque cela est possible l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que A est inversible si, et seulement si pour tout $Y = (y_i)_1^n \in \mathbb{R}^n$, l'équation linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X = (x_i)_1^n \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution. Écrire cette équation linéaire.

b) On pose $s = \sum_1^n x_i$, $S = \sum_1^n y_i$. Montrer que si $1 + (n-1)a \neq 0$ on a $s = \frac{S}{1+(n-1)a}$. En déduire que sous ces hypothèses $AX = Y$ équivaut à $(1-a)x_i = y_i - \frac{S a}{1+(n-1)a}$, $1 \leq i \leq n$. On suppose de plus que $a \neq 1$, montrer que

$$x_i = \frac{(1 + (n-1)a)y_i - aS}{(1-a)(1+(n-1)a)}, \quad 1 \leq i \leq n$$

et conclure.

Exercice 3. Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant s'il y a lieu des valeurs des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 5 \\ x + 7y = \beta \end{cases}, \begin{cases} x + y - az = 0 \\ x + ay - z = 0 \\ x + (a+1)y + 2z = 0 \end{cases}, \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}.$$

Solutions : 1) Si $\beta \neq 5$ le système n'a pas de solutions, si $\beta = 5$ la seule solution est $(5, 0)$.

2) : Si $a = 1$ le système admet comme solutions $\{(4\lambda, -3\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, sinon, la seule solution est $(0, 0, 0)$.

3) Si $a = 1$ le système admet comme solutions $\{(1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, si $a = -2$ le système n'a pas de solution et si $a \neq 1$ et $a \neq 2$ il admet l'unique solution $(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2})$.

Exercice 4. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, -2, 0, 3)$, $v_2 = (2, 3, 0, 1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$ forment une famille libre; montrer que le vecteur $v = (3, 9, -4, -2)$ appartient au sous espace E engendré par les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 et déterminer les composantes de v dans cette base de E .

Solution : $v = v_1 - 3v_2 - 2v_3$.

Exercice 5. Soient F et G les sous-espaces de \mathbb{R}^4 engendrés respectivement par $\{v_1, v_2\}$ et $\{w_1, w_2\}$ où

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (2, 1, 3, 1), \quad w_1 = (1, 1, 1, 1), \quad w_2 = (3, -4, 4, 2).$$

Déterminer une base de $F \cap G$.

Solution : $F \cap G = \text{vect}\{(8, 1, 9, 7)\}$.