Exercices corrigés
Algèbre linéaire 1

1 Enoncés

Exercice 1 On rappelle que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si

(I) $(E, +)$ est un groupe commutatif ;

(II-1) $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(II-2) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(II-3) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

(II-4) $1 \cdot x = x$.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note 0_E l'élément neutre de $(E, +)$ (que l'on appelle aussi l'*origine* de $(E, +, \cdot)$) et $0_{\mathbb{K}}$ le nombre zéro (dans $\mathbb{K}$). Pour tout x dans E, le symétrique de x est noté $-x$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in E$, $x + x = 2 \cdot x$.

(2) Montrer que, pour tout $x \in E$, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

(3) Montrer que, pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

Exercice 2 Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Montrer que $F := F_1 \cap \ldots \cap F_m$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $F := \mathrm{vect}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et A, B deux sous-ensembles de E.

(1) Montrer que, si $A \subset B$, alors $\mathrm{vect}\, A \subset \mathrm{vect}\, B$.

(2) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{vect}\, A = A$.

(3) Montrer que, si $A \subset B \subset F$ et A engendre F, alors B engendre F.

Exercice 5 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 6 Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est-elle libre ?

(2) Quel est le rang de la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$?

(3) Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $\mathbf{u} = (1, 1, \alpha, \beta)^t$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Soient c et s les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x) = \cos x \quad \text{et} \quad s(x) = \sin x.$$

Montrer que $\{c, s\}$ est une famille libre de E. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel T engendré par la famille $\{c, s\}$?

(2) Soient α, β, γ trois réels fixés. Soient f, g, h les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x + \alpha), \quad g(x) = \cos(x + \beta) \quad \text{et} \quad h(x) = \cos(x + \gamma).$$

Montrer que f, g, h appartiennent à T, et expliciter leurs coordonnées dans la base $\{c, s\}$ de T. La famille $\{f, g, h\}$ est-elle libre ? Quel est son rang ?

(3) Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts. Pour tout entier $k \in \{1, 2, 3\}$ on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = |x - a_k|.$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille libre de E.

Exercice 8 (1) On rappelle que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$ et $\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Sont-ils en somme directe ?

(2) Montrer que $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sont-ils en somme directe ?

Exercice 9 (1) Soient $F := \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ et $G := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y, z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs bases et leurs dimensions. Sont-ils en somme directe ?

(2) Soit $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y - z,\ t = x + y + z\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.

Exercice 10 Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.

(1) Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'inclusion est stricte.

(2) Montrer que, si $A + B = A + C$, $A \cap B = A \cap C$ et $B \subset C$, alors $B = C$.

Exercice 11 On considère l'application donnée par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x + 2y + 2z \\ -8x + 7y + 4z \\ -13x + 5y + 8z \end{pmatrix}. \end{array}$$

(1) Montrer que φ est une application linéaire. Déterminer l'image par φ des vecteurs de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\varphi(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$.

(2) Déterminer le noyau de φ. En donner une base et préciser sa dimension.

(3) L'application φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(4) Soit ψ l'application linéaire donnée par

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ x+2y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Déterminer $\varphi \circ \psi$.

Exercice 12 On considère l'application donnée par

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

ainsi que les vecteurs $\mathbf{u} := (1,2,3)^t$ et $\mathbf{v} := (1,1,1)^t$.

(1) Montrer que φ est linéaire. Déterminer $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v})$ et $\varphi(\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$.

(2) Déterminer le noyau de φ. En donner une base et préciser sa dimension.

(3) Déterminer l'image de φ. En donner une base et préciser sa dimension.

Exercice 13 Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $\mathcal{A} := \{x_1, \ldots, x_m\}$ une famille de vecteurs de E.

(1) Montrer que, si $\mathcal{A}$ est liée, alors $f(\mathcal{A}) = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)\}$ est liée.

(2) Montrer que, si $\varphi(\mathcal{A})$ est libre, alors $\mathcal{A}$ est libre.

(3) Montrer que, si $\mathcal{A}$ est libre et φ est injective, alors $\varphi(\mathcal{A})$ est libre.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

(1) Pour tout $x \in E$, $2 \cdot x = (1+1) \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = x + x$, où l'on a utilisé successivement les axiomes (II-2) et (II-4).

(2) On a :

$$\begin{array}{rcll} 0_{\mathbb{K}} \cdot x & = & (0_{\mathbb{K}} 2) \cdot x & \\ & = & 0_{\mathbb{K}} \cdot (2 \cdot x) & \text{[d'après l'axiome (II-3)]} \\ & = & 0_{\mathbb{K}} \cdot (x + x) & \text{[d'après la question (1)]} \\ & = & 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x. & \end{array}$$

En simplifiant (c'est-à-dire, en ajoutant $-(0_{\mathbb{K}} \cdot x)$ des deux côtés), on obtient l'égalité $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$.

(3) D'après la question (2), $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = (1 \cdot x) + ((-1) \cdot x) = x + ((-1) \cdot x)$, où la troisième égalité résulte de l'axiome (II-2) et où la dernière égalité résulte de l'axiome (II-4). On en déduit que $(-1) \cdot x$ est le symétrique de x, c'est-à-dire, $-x$.

Solution de l'exercice 2 : Nous devons montrer que pour tous $x, y \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x + \alpha y \in F$. Soient donc $x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconques. Par définition de l'intersection, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, $x, y \in F_k$. Comme F_k est un sous-espace vectoriel de E nous déduisons que

$$x + \alpha y \in F_k,$$

et ce pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$. Donc $x + \alpha y$ appartient à l'intersection des F_k, c'est-à-dire, à F.

Solution de l'exercice 3 : Remarquons tout d'abord que F est non vide, puisque que

$$0_E = 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_m \in F.$$

Soient $x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconques. Alors x et y s'écrivent

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \quad \text{et} \quad y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m,$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) + \alpha(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m) \\ &= (\alpha_1 + \alpha\beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_m + \alpha\beta_m)x_m. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x + \alpha y$ est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_m$, c'est-à-dire, un élément de F.

Solution de l'exercice 4 :

(1) Supposons que $A \subset B$, et montrons que tout élément de $\operatorname{vect} A$ appartient à $\operatorname{vect} B$. Soit donc x quelconque dans $\operatorname{vect} A$. Si $A = \emptyset$, alors $\operatorname{vect} A = \{0\}$ et donc x est forcément le vecteur nul. Comme $\operatorname{vect} B$ est un sous-espace vectoriel, $\operatorname{vect} B \ni 0$ et l'on a bien $\operatorname{vect} A \subset \operatorname{vect} B$. Si A est non vide, alors

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_1, \dots, x_p \in A,\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}: \quad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p.$$

Puisque $A \subset B$, les x_k sont aussi dans B, de sorte que x est une combinaison linéaire de vecteurs de B, c'est-à-dire, un élément de $\operatorname{vect} B$. On a donc encore $\operatorname{vect} A \subset \operatorname{vect} B$.

(2) Supposons que $A = \operatorname{vect} A$. Puisque $\operatorname{vect} A$ est un sous-espace vectoriel, il en est de même de A. Réciproquement, supposons que A soit un sous-espace vectoriel, et montrons que $A = \operatorname{vect} A$. Remarquons que tout élément de A est une combinaison linéaire particulière d'éléments de A (prendre $p = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $x_1 = x$). Donc on a clairement l'inclusion $A \subset \operatorname{vect} A$. De plus, si A est un sous-espace vectoriel, alors A est non vide. Soit alors $x \in \operatorname{vect} A$:

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_1, \dots, x_p \in A,\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}: \quad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p.$$

Puisque A est stable par combinaison linéaire, $x \in A$. On a donc aussi l'inclusion $\operatorname{vect} A \subset A$.

(3) D'après le point (1), $\operatorname{vect} A \subset \operatorname{vect} B \subset \operatorname{vect} F$. Or, $\operatorname{vect} F = F$ puisque F est un sous-espace vectoriel. De plus, $\operatorname{vect} A = F$ puisque A engendre F. Finalement, on a :

$$F \subset \operatorname{vect} B \subset F,$$

ce qui montre que $\operatorname{vect} B = F$. Autrement dit, B engendre F.

Solution de l'exercice 5 : On résout l'équation vectorielle $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$. Ceci revient résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& \alpha + \gamma + 2\delta, \\ 0 &=& \alpha + \beta + \delta, \\ 0 &=& \alpha + 2\beta - 2\gamma, \\ 0 &=& \alpha - \beta + 3\gamma - \delta. \end{array}\right.$$

On trouve que la seule solution possible est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Donc la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est libre, et puisque son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution de l'exercice 6 :

(1) On résout l'équation vectorielle $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$. Ceci revient résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \alpha + \gamma + \delta, \\ 0 & = & \alpha + \beta + \delta, \\ 0 & = & \alpha + 2\beta - 2\gamma + 2\delta, \\ 0 & = & \alpha + \beta + 3\gamma - 2\delta. \end{array}\right.$$

On trouve que ce système est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \alpha + \gamma + \delta, \\ 0 & = & \beta - \gamma, \\ 0 & = & \gamma - \delta. \end{array}\right.$$

Ce système admet d'autres solutions que la solution nulle. On en déduit que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ n'est pas libre.

(2) D'après ce qui précède, le rang de la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est inférieur ou égal à 3. On considère alors la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. On vérifie facilement qu'elle est libre, de sorte que le rang cherché est en fait égal à 3.

(3) Pour que $\mathbf{u}$ appartienne au *sev* engendré par $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, il faut que l'équation vectorielle

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_4$$

admette au moins une solution. On cherche donc à résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha + \gamma + \delta, \\ 1 & = & \alpha + \beta + \delta, \\ a & = & \alpha + 2\beta - 2\gamma + 2\delta, \\ b & = & \alpha + \beta + 3\gamma - 2\delta. \end{array}\right.$$

On vérifie que ce système est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha + \gamma + \delta, \\ 0 & = & \beta - \gamma, \\ a-1 & = & -\gamma + \delta, \\ b-1 & = & 3\gamma - 3\delta. \end{array}\right.$$

En considérant les deux dernières équations, on voit que le système n'a de solution que si $b-1 = -3(a-1)$, c'est-à-dire, si $b + 3a = 4$.

Solution de l'exercice 7 :

(1) Considérons l'équation $\alpha c + \beta s = 0$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Cette équation est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

Les choix $x = 0$ et $x = \pi/2$ donnent respectivement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. La famille $\{c, s\}$ est donc libre, et la dimension de T est égale à 2.

(2) Puisque $\cos(x + \alpha) = \cos x \cos\alpha - \sin x \sin\alpha$, on voit que

$$f = \cos\alpha \cdot c - \sin\alpha \cdot s \in T$$

et que les coordonnées de f dans la base $\{c, s\}$ de T sont données par le couple $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$. De même,

$$g = \cos\beta \cdot c - \sin\beta \cdot s \in T \quad \text{et} \quad h = \cos\gamma \cdot c - \sin\gamma \cdot s \in T;$$

les coordonnées de g et h dans la base $\{c, s\}$ de T sont données respectivement par les couples $(\cos\beta, -\sin\beta)$ et $(\cos\gamma, -\sin\gamma)$. La fammille $\{f, g, h\}$ ne peut pas être libre, puisque son cardinal est égal à 3 alors que la dimension de l'espace vectoriel T est égale à 2. Son rang vaut au plus 2 (car $\dim T = 2$) et au moins 1 (car les fonctions f, g, h sont non nulles). Le rang est égal à 1 lorsque f, g, h sont colinéaires, c'est-à dire lorsqu'il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $f = ag = bh$ ou, de manière équivalente, lorsque

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ -\sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Des équations $\cos\alpha = a\cos\beta$ et $\sin\alpha = a\sin\beta$ on tire, en les élevant au carré et en les sommant, que $a^2 = 1$, c'est-à-dire, que $a \in \{-1, 1\}$. Si $a = 1$, alors $\beta = \alpha + 2k\pi$, et si $a = -1$, alors $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$. En résumé, f et g sont colinéaires si et seulement si $\beta \in \{\alpha\} + \pi\mathbb{Z}$. De même, f et h sont colinéaires si et seulement si $\gamma \in \{\alpha\} + \pi\mathbb{Z}$. La famille $\{f, g, h\}$ est donc de rang 1 lorsque α, β et γ diffèrent d'un multiple entier de π ; elle est de rang 2 dans le cas contraire.

(3) Considérons l'équation $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, qui équivaut à la condition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0.$$

Les choix $x = a_1$, $x = a_2$ et $x = a_3$ donnent respectivement les équations

$$\begin{aligned} \beta\,|a_1 - a_2| + \gamma\,|a_1 - a_3| &= 0, \\ \alpha\,|a_2 - a_1| + \gamma\,|a_2 - a_3| &= 0, \\ \alpha\,|a_3 - a_1| + \beta\,|a_3 - a_2| &= 0. \end{aligned}$$

Posons $a := |a_3 - a_1|$, $b := |a_3 - a_2|$ et $c := |a_1 - a_2|$. Le système d'équations précédent s'écrit

$$\begin{cases} 0 = a\alpha + b\beta, \\ 0 = c\alpha + b\gamma, \\ 0 = c\beta + a\gamma. \end{cases}$$

En résolvant ce système linéaire, et en tenant compte du fait que a, b et c sont non nuls, on voit que la seule solution possible est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On peut aussi écrire le système sous forme matricielle, et remarquer, pour arriver à la même conclusion, que la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$$

a pour déterminant le réel non nul $-2abc$.

Solution de l'exercice 8

(1) La fonction nulle ν (définie par $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) appartient à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B}$. Donc, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont non vides. De plus, pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{A}$ et tout réel α, la fonction $f + \alpha g$ satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = f(-x) + \alpha g(-x) = (f + \alpha g)(-x).$$

Par conséquent, $f + \alpha g \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vetoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. De même, pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{B}$ et tout réel α, la fonction $f + \alpha g$ satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = -f(-x) - \alpha g(-x) = -(f + \alpha g)(-x).$$

Par conséquent, $f + \alpha g \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{B}$ est un sous-espace vetoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit maintenant f une fonction de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(-x) \quad \text{et} \quad f(x) = -f(-x),$$

ce qui montre que $f(x) = 0$. Donc $f = \nu$. On en déduit que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\nu\} = \{0_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R})}\}$, et que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont en somme directe.

(2) Il est facile de voir que A et B contiennent le vecteur nul $(0,0,0)$. De plus, si (x,y,z) et (x',y',z') appartiennent à A et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x,y,z) + \alpha(x',y',z') = (x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z')$ satisfait

$$(x+\alpha x') + (y+\alpha y') + (z+\alpha z') = (x+y+z) + \alpha(x'+y'+z') = 0.$$

Donc $(x,y,z) + \alpha(x',y',z') \in A$, et A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De même, si (x,y,z) et (x',y',z') appartiennent à B et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x,y,z) + \alpha(x',y',z') = (x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z')$ satisfait

$$(x+\alpha x') - (y+\alpha y') + (z+\alpha z') = (x-y+z) + \alpha(x'-y'+z') = 0.$$

Donc $(x,y,z)+\alpha(x',y',z') \in B$, et B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soit maintenant (x,y,z) un vecteur de $A \cap B$. Alors,

$$x+y+z = 0 \quad \text{et} \quad x-y+z = 0.$$

Le vecteur $(1,0,-1)$ satisfait les deux équations ci-dessus. On voit donc que $A \cap B$ n'est pas réduit à $\{(0,0,0)\}$. Les sous-espaces A et B ne sont pas en somme directe.

Solution de l'exercice 9

(1) Il est facile de voir que le vecteur $(0,0,0)$ appartient à F et à G. Donc F et G sont non vides. Soient $(x,x,x), (y,y,y) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$(x,x,x) + \alpha(y,y,y) = (x+\alpha y, x+\alpha y, x+\alpha y) \in F.$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $(0,y,z), (0,y',z') \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$(0,y,z) + \alpha(0,y',z') = (0, y+\alpha y', z+\alpha z') \in G.$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On voit que

$$F = \{x(1,1,1) | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1,1,1)\},$$

$$G = \{y(0,1,0) + z(0,0,1) | x, y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

De plus, on vérifie facilement que les familles $\{(1,1,1)\}$ et $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ sont libres. Elles forment donc des bases respectives de F et G. On en déduit que $\dim F = 1$ et $\dim G = 2$. Enfin, si $(x,y,z) \in F \cap G$, alors $x = y = z$ et $x = 0$. Donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$, et F et G sont en somme directe.

(2) On vérifie facilement que $(0,0,0,0) \in H$, de sorte que $F \neq \emptyset$. Soient $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $(x,y,z,t) + \alpha(x',y',z',t') = (x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z', t+\alpha t')$ satisfait :

$$x + \alpha x' = 2y - z + \alpha(2y' - z') = 2(y+\alpha y') - (z+\alpha z'),$$

$$t + \alpha t' = x+y+z+\alpha(x'+y'+z') = (x+\alpha x') + (y+\alpha y') + (z+\alpha z'),$$

ce qui montre que $(x,y,z,t) + \alpha(x',y',z',t') \in H$. Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus,

$$\begin{aligned} H &= \{(2y-z, y, z, x+y+z) | x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(0,0,0,1) + y(2,1,0,1) + z(-1,0,1,1) | x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Considérons l'équation vectorielle $\alpha(0,0,0,1)+\beta(2,1,0,1)+\gamma(-1,0,1,1)=(0,0,0,0)$. Cette équation équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 2\beta+\gamma \\ 0 & = & 2\beta \\ 0 & = & \gamma \\ 0 & = & \alpha+\beta+\gamma \end{array}\right.$$

dont l'unique solution est $\alpha=\beta=\gamma=0$. La famille $\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\}$ est donc libre, et c'est une base de H.

Solution de l'exercice 10

(1) Soit $x \in (A\cap C)+(B\cap C)$. Alors $x=a+b$ avec $a\in A\cap C$ et $b\in B\cap C$. Puisque $a\in C$ et $b\in C$ et C est un sev, $a+b\in C$. Donc x appartient à $A+B$ et à C. Dans $\mathbb{R}^2$, Si l'on prend $A=\text{vect}\{e_1\}$, $B=\text{vect}\{e_2\}$ et $C=\text{vect}\{e_1+e_2\}$, où $\{e_1,e_2\}$ est la base canonique, alors

$$(A\cap C)+(B\cap C)=\{0\}\cap\{0\}=\{0\} \quad \text{et} \quad (A+B)\cap C=\mathbb{R}^2\cap C=C.$$

(2) Puisque $B\subset C$, il suffit de montrer que $C\subset B$. Soit donc $x\in C$. Puisque $0_E\in A$, $x=0_E+x\in A+C$. Puisque $A+C=A+B$, on peut écrire $x=a+b$ avec $a\in A$ et $b\in B$. Maintenant, $a=x-b$, où $x\in C$ et $x\in B\subset C$, et puisque C est un sev, $a\in C$. Donc $a\in A\cap C=B\cap C$. Donc $a\in B$. Finalement, $x=a+b$ avec $a\in B$ et $b\in B$. Puisque B est un sev, $x\in B$.

Solution de l'exercice 11 :

(1) Vérifions que φ est linéaire :

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\alpha\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right)\\
&= \varphi\begin{pmatrix} \alpha x+\beta x'\\ \alpha y+\beta y'\\ \alpha z+\beta z'\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -(\alpha x+\beta x')+2(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')\\ -8(\alpha x+\beta x')+7(\alpha y+\beta y')+4(\alpha z+\beta z')\\ -13(\alpha x+\beta x')+5(\alpha y+\beta y')+8(\alpha z+\beta z')\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix} -x+2y+2z\\ -8x+7y+4z\\ -13x+5y+8z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -x'+2y'+2z'\\ -8x'+7y'+4z'\\ -13x'+5y'+8z'\end{pmatrix}\\
&= \alpha\varphi\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\beta\varphi\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\varphi(\mathbf{e}_1)=\begin{pmatrix} -1\\ -8\\ -13\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix} 2\\ 7\\ 5\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_3)=\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ 8\end{pmatrix}.$$

Enfin, $2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3=(2,1,-1)^t$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\varphi(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3) &= 2\varphi(\mathbf{e}_1)+\varphi(\mathbf{e}_2)-\varphi(\mathbf{e}_3)\\
&= 2\begin{pmatrix} -1\\ -8\\ -13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ 7\\ 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\\ -13\\ -29\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) On cherche les solutions de l'équation vectorielle $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En notant $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & -x + 2y + 2z, \\ 0 & = & -8x + 7y + 4z, \\ 0 & = & -13x + 5y + 8z. \end{array} \right.$$

La seule solution de ce système est le vecteur nul, ce que l'on peut voir aussi en calculant le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ -13 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Donc $\ker \varphi = \{\mathbf{0}\}$, l'unique base de $\ker \varphi$ est $\emptyset$, et sa dimension est nulle.

(3) Puisque $\ker \varphi = \{\mathbf{0}\}$, l'application φ est injective. Puisque les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont toutes deux égales à 3, φ est aussi surjective, et donc bijective.

(4) En notant $\mathbf{x} = (x, y)^t$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \circ \psi)(\mathbf{x}) & = & \varphi(\psi)(\mathbf{x})) \\ & = & \varphi \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -(x-y) + 2(x+y) + 2(x+2y) \\ -8(x-y) + 7(x+y) + 4(x+2y) \\ -13(x-y) + 5(x+y) + 8(x+2y) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 3x + 23y \\ 34y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Solution de l'exercice 12 :

(1) Vérifions que φ est linéaire :

$$\begin{array}{rl} & \varphi\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \\ = & \varphi \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (\alpha y + \beta y'') + (\alpha z + \beta z') \\ \alpha x + \beta x' \end{pmatrix} \\ = & \alpha \begin{pmatrix} y + z \\ x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y' + z' \\ x' \end{pmatrix} \\ = & \alpha\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta\varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ensuite, $\varphi(\mathbf{u}) = (5, 1)^t$, $\varphi(\mathbf{v}) = (2, 1)^t$ et

$$\varphi(\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le vecteur $(x,y,z)^t$ appartient à $\ker\varphi$ si et seulement si $y+z=0$ et $x=0$. C'est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $(0,y,-y)^t$ où $y\in\mathbb{R}$:

$$\ker\varphi = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ y \\ -y \end{array} \right) \middle| \, y\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{vect}\left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \right\}.$$

Le sous-espace vectoriel $\ker\varphi$ est donc de dimension 1, et admet pour base le singleton $\{(0,1,-1)^t\}$.

(3) D'après le théorème du rang, $\dim\mathbb{R}^3 = \operatorname{rg}\varphi + \dim\ker\varphi$, ce qui implique que $\operatorname{rg}\varphi = 2$. On en déduit que $\operatorname{im}\varphi = \mathbb{R}^2$ et que n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$, par exemple la base canonique, est une base de $\operatorname{im}\varphi$.

Solution de l'exercice 13

(1) Si $\mathcal{A}$ est liée, il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ non tous nuls tels que $\alpha_m x_m + \cdots + \alpha_m x_m = 0$. Mais alors

$$\alpha_1\varphi(x_1) + \cdots + \alpha_m\varphi(x_m) = \varphi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = 0,$$

et puisqu'au moins un des α_j est non nul, non voyons que $\{\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_m)\}$ est liée.

(2) Ce point se déduit du précédent par contre-apposition.

(3) Supposons $\mathcal{A}$ libre et φ injective, et considérons l'équation $\alpha_1\varphi(x_1) + \cdots + \alpha_m\varphi(x_m) = 0$. Le membre de gauche n'est autre que $\varphi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m)$, et puisque φ injective, on a nécessairement $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$. Puisque $\mathcal{A}$ est libre, on déduit de cette dernière équation que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Donc $\varphi(\mathcal{A})$ est libre.