# L1 - PCP - FEUILLE 1 : ESPACES VECTORIELS (2).

**Exercice 1.** *1) Dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *montrer que* $A = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \ : \ f(x) = f(-x), \ x \in \mathbb{R}\}$ *et* $B = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \ : \ f(x) = -f(-x), \ x \in \mathbb{R}\}$ *sont deux sous-espaces vectoriels, sont-ils en somme directe ?*

*2) Dans* $\mathbb{R}^3$ *soient* $A = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 0\}$, $A = \{(x, y, z) \ : \ x - y + z = 0\}$ *sont deux sous-espaces vectoriels, sont-ils en somme directe ?*

**Exercice 2.** *1) Dans* $\mathbb{R}^3$ *soient* $F = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$. *Montrer que* $F$ *et* $G$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*, préciser leur base, dimension, sont-ils en somme directe ?*

*2) Soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = 2y - z, \ t = x + y + z\}$. *Vérifier que* $F$ *est un sev de* $\mathbb{R}^4$ *en donner une base et sa dimension.*

**Exercice 3.** *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $A, B, C$ *trois sev de* $E$*.*

*1) Si* $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ *et* $B \subset C$*, montrer que* $B = C$*.*

*2) Montrer que* $A + (B \cap C) = B \cap (A + C)$*.*

**Exercice 4.** *Soit* $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(P) = (P(0), P'(0))$*.*

*1) Donner la matrice de* $f$ *dans les bases canoniques.*

*2) Déterminer* $Ker(f)$ *et* $Im(f)$*.*

*3) Montrer que les polynômes* $P_1, P_2$ *et* $P_3$ *définis par* $P_1(X) = 1, P_2(X) = 1 + X$ *et* $P_3(X) = 1 + X^2$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2[X]$*.*

*4) Montrer que* $v_1 = (1, 2)$ *et* $v_2 = (2, 5)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

*5) Déterminer la matrice de* $f$ *dans les bases* $P_1, P_2, P_3$ *et* $v_1, v_2$*.*

**Exercice 5.** *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application définie par* $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z)$*.*

*1-a) Montrer que* $f$ *est une application linéaire et déterminer sa matrice* $A$ *dans la base canonique* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*.*

*1-b) Déterminer* $Ker(f)$ *et en donner une base (on notera* $u_1$ *le vecteur de cette base) ; l'application* $f$ *est-elle injective ? Surjective ?*

*2) Déterminer la dimension de* $Im(f)$ *et montrer que les vecteurs* $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ *et* $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ *en forment une base.*

*3) Montrer que* $Im(f) = Ker(f - 2Id)$ *(on calculera* $f(u_2)$ *et* $f(u_3)$*).*

*4) Démontrer que* $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et préciser la matrice* $D$ *de* $f$ *dans cette base.*

*5) Donner une matrice* $P$ *inversible telle que* $D = P^{-1}AP$*.*

**Exercice 6.** $E = \mathbb{R}^3, F = vect\{(1, 1, 1); (0, 1, 1)\}$, $G = vect\{(1, 0, 1)\}$ *. Montrer que* $E = F \oplus G$ *et préciser les projecteurs associés.*

**Exercice 7.** *On considère $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f \circ f \circ f = 0$ et $f \circ f \neq 0$.*

*1) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathscr{B} = \{x, f(x), f \circ f(x)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de $f$ dans cette base ?*

*2) Déterminer une base de Im$(f)$ ; quelle est la dimension de Ker$(f)$ ? ces deux espaces sont-ils en somme directe ?*

**Exercice 8.** *Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients reels et $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que $f$ est surjectif mais n'est pas injectif. Soit $g : E \to E$ l'endomorphisme défini par $g(P) = xP$. Montrer que $f$ est injectif mais n'est pas surjectif. Commentaires ?*

Vous trouverez d'autres documents ainsi que les archives des deux précédentes années à l'adresse suivante : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/L1PCP.html