Petit Corrigé de l'examen final.

Exercice 1 : 1) Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\Delta_{a,b} &= \begin{vmatrix} a & a+b & a-b \\ a+b & a & a+b \\ a-b & a+b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & -b \\ a+b & -b & 0 \\ a-b & 2b & b \end{vmatrix} \quad (C_2 \longleftarrow C_2 - C_1,\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1) \\ &= \begin{vmatrix} a & b & -b \\ a+b & -b & 0 \\ 2a-b & 3b & 0 \end{vmatrix}, \quad (L_3 \longleftarrow L_3 + L_1) \\ &= -b \begin{vmatrix} a+b & -b \\ 2a-b & 3b \end{vmatrix} = -b(3b(a+b) + b(2a-b)) = -b(5ab + 2b^2) = -b^2(5a+2b).\end{aligned}$$

2) La famille est libre si et seulement si (c'est le cours) le déterminant de la matrice 3×3 admettant comme colonnes nos trois vecteurs est non nul i.e. $\Delta_{a,b} \neq 0$ i.e. $b^2(5a+2b) \neq 0$ c'est donc le plan $\mathbb{R}^2$ privé des deux droites $b = 0$ et $5a + 2b = 0$.

3) Avec (1) nous avons

$$\lim_{b\to 0} \frac{\Delta_{a,b}}{\sin(b^2)} = \lim_{b\to 0} \frac{-b^2(5a+2b)}{\sin(b^2)} = \lim_{b\to 0} \frac{-b^2(5a+2b)}{b^2 + b^2\varepsilon(b)} = \lim_{b\to 0} \frac{-(5a+2b)}{1+\varepsilon(b)} = -5a.$$

Exercice 2 : Soit $x > 0$. La fonction f définie sur $]-1, \infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(c) = \frac{1}{1+c}.$$

Puisque $c \in]0, x[$, on a

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

On obtient les inégalités demandées en multipliant les inégalités ci-dessus par x.

Exercice 3 : Lorsque x tend vers zéro, la fonction $x \mapsto \cos x + \sin^2 x$ tend vers 1. Pour pouvoir utiliser le théorème de composition des développements limités, il faut donc écrire f sous la forme

$$f(x) = \ln(1 + \cos x + \sin^2 x - 1) = \ln(1 + X)$$

avec $X = \cos x + \sin^2 x - 1$. Pour obtenir le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin^2 x$ on tronque à l'ordre trois le carré de la partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin x$:

$$\sin^2 x = \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2\right]_{\text{ordre } 3} + x^3\varepsilon(x) = x^2 + x^3\varepsilon(x).$$

Comme $\cos x = 1 - x^2/2 + x^3\varepsilon(x)$, on en déduit que

$$\cos x + \sin^2 x - 1 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 - 1 + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x).$$

D'autre part,

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X).$$

Par composition des développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(\cos x + \sin^2 x) &= \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]_{\text{ordre } 3} + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\right]_{\text{ordre } 3} + x^3\varepsilon(X) \\ &= \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(X).\end{aligned}$$

Exercice 4 : Les degrés du dénominateur et numérateur sont égaux à 3, une division euclidienne s'impose et on trouve facilement :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)} = 1 - \frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Il faut maintenant décomposer la fraction $-\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$, d'aprés le cours la décomposition sera de la forme (le discriminant du polynôme de degré deux $x^2 + x + 1$ est < 0) :

$$-\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

- Pour trouver a, on multiplie par $x + 1$ puis on fait $x = -1$ il vient $a = -1$.
- Pour trouver b, on multiplie par x puis on fait tendre x vers $+\infty$ il vient $a + b = -2$ soit $b = -1$.

– Pour trouver c, on fait $x=0$ il vient $a+c=-1$ soit $c=0$.
Par conséquent $-\dfrac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = -\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x^2+x+1}$ et

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Le calcul de la primitive est maintenant classique, le domaine de définition de f étant $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx \\
&= x - \log|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= x - \log|x+1| - \frac{\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= x - \log|x+1| - \frac{\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \\
&= x - \log|x+1| - \frac{\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{2dx/\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \\
&= x - \log|x+1| - \frac{\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{u^2+1}, \quad \left(u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right), \\
&= x - \log|x+1| - \frac{\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \begin{cases} C_1, & \text{si } x<-1, \\ C_2, & \text{si } x>-1. \end{cases}
\end{aligned}$$