

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Questions de cours :

- 1) Donner le développement limité à l'ordre 5 à l'origine de $f(x) = \sin(x)$.
- 2) Donner le développement limité à l'ordre 3 à l'origine de $f(x) = (1+x)^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- 3) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice 1 : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\Delta_{a,b} = \begin{vmatrix} a & a+b & a-b \\ a+b & a & a+b \\ a-b & a+b & a \end{vmatrix}$$

- 1) Calculer $\Delta_{a,b}$.
- 2) Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la famille

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a-b \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ a+b \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$$

constitue une base de \mathbb{R}^3 . Représenter graphiquement dans le plan Oab cet ensemble.

- 3) On se fixe $a \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\Delta_{a,b}}{\sin(b^2)} = -5a$.

Exercice 2 : En appliquant (après l'avoir correctement énoncé) sur l'intervalle $[0, x]$ le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, montrer que pour tout $x > 0$:

$$x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par $f(x) = \ln(\cos x + \sin^2 x)$.

- 1) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$.
- 2) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \cos(x) + \sin^2(x)$.
- 3) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f .

Exercice 4 : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)}$ et expliciter les primitives de f sur leur domaine de définition.

Fin du sujet