UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - DEVOIR MAISON 4. ☯ ☢ ☯

Devoir à remettre dans la boite de P.Lassère (bat. 1R3) vendredi prochain.

Exercice 1. *Montrer que la fonction* $x \mapsto \sin(x)$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Solution : Posons $x = 2n\pi, y_n = 2n\pi + \pi/2, (n \in \mathbb{N})$, ces deux suite tendent vers $+\infty$ et $\lim_n f(x_n) = 0,\ \lim_n f(y_n) = 1$ donc f n'admet pas de limite en $+\infty$ (comme de plus $|\sin(x)| \leq 1$, la limite ne peut être $+\infty$ (ou $-\infty$)).

Exercice 2. *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{2^x - 2}{x-1}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}.$$

Solution : • L'indétermination est facile à lever :

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• Pour la seconde remarquons que $\frac{2^x-2}{x-1} = \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ où $g(x) = 2^x = e^{x\log(2)},\ (x \in \mathbb{R}_+^\star)$; la limite cherchée est donc le taux d'accroissement en $x = 1$ de la fonction g notoirement dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $g'(x) = \log(2)g(x)$: la limite est $g'(1) = 2\log(2)$.

Exercice 3. *On pose pour* $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2argch\sqrt{\frac{1+ch(x)}{2}}$.

1) Montrer que f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

2) Etudier la dérivabilité de f *et calculer la dérivée de* f *pour* $x > 0$ *et* $x < 0$.

3) En déduire une expression plus simple de f.

Solution : 1) La fonction argch est définie sur $[1, \infty[$ où elle est continue mais seulement dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (en $x = 0$ la pente est verticale ie la dérivée à droite vaut $+\infty$). Pour tout réel x : $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, donc $\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}} \geq 1$ et f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. Remarquez bien que $\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}} = 1$ si et seulement si $x = 0$ et arch n'est pas dérivable en $x = 1$: en ce point la dérivabilité de f est donc incertaine et à vérifier, elle est par contre clairement dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée de fonctions dérivables.

2) et 3) Nous avons pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 2\frac{\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right)'}{2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}\right)^2 - 1}} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}}} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x) - 1} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{|\mathrm{sh}(x)|}$$

Par conséquent $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$ On en déduit facilement que pour $x \neq 0$, $f(x) = |x| + C$ et comme $f(0) = 1$ **et** que f est continue à l'origine : $f(x) = |x| + 1,\ x \in \mathbb{R}$ en particulier

f n'est pas dérivable à l'origine et $f'_g(0) = -1,\ f'_d(0) = 1$; remarquez bien que l'on ne pouvais pas déduire directement ceci de l'expression trouvée plus pour f' qui impliquait seulement que $\lim_{x\to 0_+} f'(x) = 1,\ \lim_{\to 0_-} f'(x) = -1$ et non pas que les taux d'accroissements de f en 0_+ et 0_- valent respectivement 1 et-1 ; toutefois au vu de la remarque/exercice suivant dans le cours le théorème des accroissements finis on pouvait effectivement en déduire la non dérivabilité de f à l'origine.