2008/09 L1 PCP ~ Devoir n° 3 Corrigé (17 mars 2009).

et en bonus les corrigés des derniers déterminants du cours polycopié...

Exercice 1, solution :

1) $$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \ \& \ C_4 = C_4 + C_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & a+b & b-a \\ a & -b & a+b & a-b \\ b & a & b+a & a-b \\ b & -a & b+a & b-a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} a & b & 1 & -1 \\ a & -b & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ b & -a & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} 2a & 0 & 2 & 0 \\ a & -b & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ 2b & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_4}{=} (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} 2(a-b) & 0 & 0 & 0 \\ a & -b & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ 2b & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dvt \% ligne 1}}{=} 2(a+b)(a-b)^2 \begin{vmatrix} -b & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dvt \% à ligne 3}}{=} 2(a+b)(a-b)^2 \cdot 2\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 4(a+b)^2(a-b)^2$$

2) Vu ce qui précède, $(\det(A)=0) \Leftrightarrow (a=b$ ou $a=-b)$. Par conséquent

→ A est de rang 4 si $a \neq b$ et $a \neq -b$.

→ Si $a=b$, alors $A = \begin{pmatrix} a & a & a & -a \\ a & -a & a & a \\ a & a & a & -a \\ a & -a & a & a \end{pmatrix}$ donc si $a=b\neq 0$ alors comme $C_1 = C_3$ et $C_2 = -C_4$ et C_1 & C_3 libre : A est de rang 2

→ Si $a=-b \neq 0$ comme dans le cas précédent A est de rang 2.

→ Si $a=b=0$, A est la matrice nulle : $rg(A) = 0$.

Exercice 2 solution : 1) $\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m+1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$= (-1)^{3+1}(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(1-m) = (1-m^2)$

2) on en déduit que $\det(A_m) = 0 \iff m = \pm 1$. Par conséquent :

- $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$: $rg(A_m) = 3$
- $m = 1$ alors $C_1 = C_2$, $\{C_2, C_3\}$ libre $\Rightarrow rg(A_1) = 2$ on peut aussi remarque que le mineur $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \\ 1 & \\ 1 & 1 \quad -1 \end{pmatrix}$ est non nul...
- $m = -1$, alors $A_{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & -1 \\ & -1 \\ 1 \quad 1 & -1 \end{pmatrix}$ ce mineur vaut $-2 \neq 0$: $rg(A_{-1}) = 2$

on peut aussi remarquer que $C_1 = -C_3$ et $\{C_1, C_2\}$ libres donc

3) D'après le cours $rg(f_m) = rg(A_m)$ donc voir (2)

f_m sera un isomorphisme ssi $rg(f_m) = 3$ ie pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

4) a] Vu le cours, (S_m) admet une solution si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(f_m)$. f_m étant surjective pour $m \neq \pm 1$ nous sommes déjà assurés que (S_m) admettra une (et une seule car f_m sera aussi injective) solution pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Si $m = \pm 1$ alors (S_m) admettra aucune solution (si $\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Im f_m$) ou une infinité de solution (c'est le cas car $\dim\ker f = 1 > 0$)

4-b) Résolution du système :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y - (m+1)z = 1-m & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ -(m+1)z = 1-m & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\underset{\boxed{\text{si } m \neq -1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x + y + \frac{m(m-1)}{m+1} = m \\ (m-1)y + 1 - m = 1 - m \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases} \underset{\boxed{\text{si } m \neq 1}}{\iff} \begin{cases} x + y = m - \frac{m(m-1)}{m+1} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2m}{m+1} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

$$\boxed{S_m = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2m}{m+1} \\ 0 \\ \frac{m-1}{m+1} \end{pmatrix} \right\} \text{ si } m \neq \pm 1}$$

Si $m = 1$: $(S_1) \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ x = 1 - y \end{matrix}$$

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}}$$

Si $m = -1$ $(S_{-1}) \iff \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ equations (1) et (3) incompatibles donc $\boxed{S_{-1} = \{\emptyset\}.}$

Exercice: Montrer que $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+ca)$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ c-b & a(c-b) & c^2-b^2 \\ c-a & b(c-a) & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ & $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (c-b)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & a & c+b \\ 1 & b & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$= (c-b)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2+ab \\ 1 & a & a+b+c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_2$

$$= (c-b)(c-a)(b-a)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a+b & a^2+b^2+ab \\ 1 & b+a+c \end{vmatrix}$$

On développe % à la dernière ligne

$$= (c-b)(c-a)(b-a)(-1)\left\{(a+b)(a+b+c) - a^2 - b^2 \overset{-ab}{}\right\}$$

$$= (c-b)(c-a)(a-b)(ab+ac+bc)$$

. . . . . .

<u>Exercice</u> : Calculer $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} b-a & a-b & a+b+2c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} b-a & a-b & 2(a+c) \\ a+b & -2b & c-b \\ a+c & b+c & b-c \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} b-a & 0 & 2(a+c) \\ a+b & a-b & c-b \\ a+c & a+b+2c & b-c \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} b-a & 0 & 2(a+c) \\ a+b & a-b & c-b \\ 2a+b+c & 2(a+c) & 0 \end{vmatrix}$$

on développe % à la seconde ligne car j'ai du mal à faire apparaître un zero supplémentaire.

$$= -(a+b)\left(-4(a+c)^2\right) + (a-b)\left(-2(a+c)(2a+b+c)\right) - (c-b)2(b-a)(a+c)$$

$$= 2(a+c)\left\{ 2(a+b)(a+c) - (a-b)(2a+b+c) + (a-b)(c-b) \right\}$$

$$= 2(a+c)\left\{ 2(a+b)(a+c) + (a-b)\left[\cancel{c} - b - 2a - b - \cancel{c}\right] \right\}$$

$$= 2(a+c)\left\{ 2(a+b)(a+c) - (a-b)2(a+b) \right\}$$

$$= 4(a+c)(a+b)(a+c-a+b) = 4(a+c)(a+b)(b+c)$$

<u>Exercice</u> : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ & $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (a^2+b^2)(b-a)(a+b) & (c^2+a^2)(c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a^2+b^2)(a+b) & (a^2+c^2)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left((a^2+c^2)(a+c) - (a^2+b^2)(a+b)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(a^3+a^2c+c^2a+c^3-a^3-a^2b-b^2a-b^3)$$

$$= (b-a)(c-a)(a^2c+c^2a+c^3-b^3-a^2b-b^2a)$$

$$= (b-a)(c-a)\left(a^2(c-b)+a(c^2-b^2)+(c-b)(c^2+bc+b^2)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\left(a^2+a(c+b)+c^2+b^2+bc\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a^2+b^2+c^2+ac+ab+bc)$$