

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le déterminant de A (on donnera le résultat sous forme factorisée).
- 2) Etudier le rang de A en fonction des paramètres réels a, b .

Exercice 2. Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le déterminant de A_m (on donnera le résultat sous forme factorisée).
- 2) Préciser le rang de A_m en fonction du paramètre réel m .
- 3) On considère l'endomorphisme f_m de \mathbb{R}^3 admettant A_m comme matrice représentative dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Quel est le rang de f_m ? Pour quels réels m , f_m est-il un isomorphisme?
- 4) On considère le système linéaire :

$$(\mathcal{S}_m) \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

4-a) Sans aucun calcul supplémentaire, pour quels réels m sommes nous assurés que ce système admettra une unique solution?

4-b) Résoudre le système (\mathcal{S}_m) pour tout $m \in \mathbb{R}$.