UNIVERSITE PAUL SABATIER 2008/2009

L1 - PCP, CONTROLE CONTINU 1.

Durée deux heures, pas de documents, calculatrices, tel. portables.

Question de cours 1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. On demande :*

(1) *Rappeler la définition de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et de* $\mathrm{Im}(f)$.

(2) *Montrer que f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 1. *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les ensembles suivants :*

- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$;
- $G = \mathrm{Vect}(2, 2, 3, 3)$;
- $H = \mathrm{Vect}(0, 0, 0, 1)$.

On demande

(1) *Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x, y, z, t) \mapsto z - t$ est linéaire.*

(2) *Déterminer* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *puis le rang de φ (i.e. la dimension de* $\mathrm{Im}(\varphi)$*).*

(3) *Montrer que F est un sous-espace vectoriel. En appliquant la formule du rang à φ, déterminer sa dimension.*

(4) *Montrer que les vecteurs* $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$ *forment une base de F.*

(5) *Est-ce que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$? Justifier la réponse.*

(6) *Est-ce que $F \oplus H = \mathbb{R}^4$? Justifier la réponse.*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme défini sur la base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ par*

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4,\ \ f(e_2) = e_2,\ \ f(e_3) = e_1 + e_4,\ \ f(e_4) = e_1 + 2e_2 + e_4.$$

(1) *Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$, que vaut $f(x, y, z, t)$?*

(2) *Déterminer une base de* $\ker(f)$ *et sa dimension.*

(3) *f est-il un isomorphisme ?*

(4) *Quelle est la dimension de Im(f) ? en donner une base.*

On pose $u_1 = e_1 + e_2 - e_4,\ \ u_2 = e_1 - e_2 - e_3,\ \ u_3 = e_2,\ \ u_4 = e_1 + e_2 + e_4$.

(5) *Montrer que la famille $\mathscr{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

(6) *Préciser les coordonnées les vecteurs $f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)$ dans la base $\mathscr{B}$.*

(7) *Préciser les coordonnées les vecteurs $f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)$ dans la base $\mathscr{U}$.*

(8) *En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{U}$.*

(9) *La somme* $\ker(f)$ + *Im(f) est-elle directe ?*

Fin de l'épreuve. Barème approx. 5+6+9.

☯ Petit Corrigé du CC1. ☯

Solution du premier exercice : $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 d'après la formule du rang. Les trois vecteurs donnés forment une famille libre dans F de dimension trois, donc forment une base de F. F et G ne peuvent être en somme directe vu que $F \cap G \neq 0$: en fait, $(2,2,3,3) \in F$, donc G est inclus dans F. En revanche on vérifie facilement que $F \cap H = 0$ (il suffit ici de voir que $(0,0,0,1) \notin F$). Comme de plus, $\dim F + \dim H = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, on en déduit que $F \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Solution du second exercice :

(1) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on a $f(X) = f(x,y,z,t) = AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+t \\ x+y+2t \\ 0 \\ x+z+t \end{pmatrix}$ donc $X \in \ker(f)$ équivaut à

$$\begin{cases} x+z+t &= 0 \\ x+y+2t &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x+z+t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z+t &= 0 \\ x+y+2t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -x-t \\ y &= -x-2t \end{cases}$$

soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x-2t \\ -x-t \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Réciproquement, les deux deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant bien dans $\ker(f)$, ce dernier est bien un sous-espace de dimension 2 admettant pour base ces deux vecteurs.

(3) Le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas pas injective donc (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de dimension finie, on peut aussi invoquer le théorème du rang) ce ne peut être un isomorphisme.

(4) Vu ce qui précède, le théorème du rang assure que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension deux admettant pour famille génératrice les quatres colonnes de A, les deux premières $e_1 + e_2 + e_4, e_2$ sont visiblement libre et forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(5) Vérification élémentaire.

(6) Les coordonnées des vecteurs $f(u_i)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont données par

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \quad f(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \quad f(u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

(7) De la question précédente on tire immédiatement les coordonnées des vecteurs $f(u_i)$ dans la base $\mathscr{U}$:

$$f(u_1) = f(u_2) = O_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{U}}, \quad f(u_3) = u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{U}}, \quad f(u_4) = 2u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{U}}$$

(8) Et par conséquent $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(9) Vu la question précedente, il est clair que les vecteurs libres $u_1, u_2 \in \ker(f))$ et $u_3, u_4 \in \mathrm{Im}(f)$, les deux espaces étant de dimension 2 ce sont des bases de ces espaces ; la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ formant une base de $\mathbb{R}^4$ on a forcément $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{vect}(u_3, u_4) = \{O_{\mathbb{R}^4}$: la somme est bien directe.

(10) Vu la définition des vecteurs u_i nous avons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(11) P^{-1} est la matrice de passe de la base $\mathscr{U}$ à la base $\mathscr{B}$, il s'agit donc d'exprimer les vecteurs e_i en fonction des u_i : le système d'équations $u_1 = e_1 + e_2 - e_4,\ u_2 = e_1 - e_2 - e_3,\ u_3 = e_3,\ u_4 = e_1 + e_2 + e_4$. s'inverse facilement et on trouve

$$e_1 = (u_1 - 2u_3 + u_4)/2, e_2 = u_3, e_3 = (u_1 - 2u_2 - 4u_3 + u_4)/2, e_4 = (-u_1 + u_4)/2$$

soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le cours nous assure alors que $A' = P^{-1}AP$.