2007-08 DERIVATION - FORMULES de TAYLOR

Exercices

Exercice 1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ s'annule au moins une fois sur chaque intervalle de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Démontrer le théorème des accroissements finis pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Exercice 4. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $g(a) \neq g(b)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$F(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x),$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

Exercice 5 (*). Soit p et q deux nombres réels et n un entier naturel non nul. Montrer que le polynôme

$$P_n(x) = x^n + px + q$$

admet au plus deux racines réelles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair

Exercice 6. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction Arctan, établir que pour tout $t > 0$, $\text{Arctan} t > \dfrac{t}{1+t^2}$.

Exercice 7 (*). Soit $f(x) = e^{1/x}$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in [x, x+1]$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}e^{1/c}.$$

b) Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \to]0, \infty[$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[\frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)\right].$$

Indication: on pourra utiliser la fonction $g = \ln f$.

Exercice 9 (*). Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ réels vérifiant l'égalité

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Montrer que le polynôme $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ possède au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Indication: considérer une primitive de P.

Exercice 10 (*). a) Montrer à l'aide du T.A.F. que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

b) En déduire que les fonctions f et g définies par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ sont monotones sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (x+1) \ln \frac{x+1}{x}.$$

d) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f$ et $\lim_{x \to +\infty} g$.

Exercice 11 (*). En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième de f pour

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$.

b) $f(x) = x^{n+1} \ln(x)$.

Exercice 12. a) Soit $f(x) = \text{Arctan}x$. Trouver $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(1) = f(0) + f'(c).$$

b) Soit $g(x) = \ln(x)$, $a = 1$ et $b = 3$. Trouver $c \in [a, b]$ tel que

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} g''(c).$$

Remarque: $2/(2 - \ln 3) = 2.21888\ldots$.

Exercice 13. a) Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions

$$f : x \mapsto e^x, \quad g : x \mapsto 1, \quad h : x \mapsto 1 + x \quad \text{et} \quad k : x \mapsto 1 + x + x^2/2.$$

b) Donner un encadrement de $e^x - (1 + x)$ sur $[0, 1/2]$.

Exercice 14 (*). Calculer $\sin(10^{-1})$ à 10^{-12} près en utilisant la formule de Taylor à un ordre bien choisi.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.