Quelques exercices supplémentaires sur les fonctions élémentaires et la dérivation (poly d'Antibiboff)

Exercices

Exercice 1. Soit $f(x) = e^{x^3-3x+1}$. Déterminer le plus grand intervalle contenant 0, sur lequel f admet une fonction réciproque g dérivable. Préciser le domaine de définition de g et son ensemble image. Calculer $g'(e)$.

Exercice 2. Justifier l'existence d'une fonction réciproque et l'expliciter pour les fonctions suivantes:

a) $f : [-3, +\infty[\to R$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

b) $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.

Exercice 3 (*). On pose $f(x) = 2x + x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est strictement croissante sur $]-1/2, 3/2[$.

c) Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

a) $f_a(x) = \dfrac{1}{a + \text{ch}x}$, $a \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \sqrt{2\text{th}^2 x - 5\text{th}x - 3}$.

Exercice 5 (*). Soient les fonctions $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ et $g : x \mapsto \sin(\text{Arcsin}x)$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 6. Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\text{Arccos}x), \quad \cos(\text{Arcsin}x).$$

Exercice 7. Vérifier que

$$\text{Arcsin}x + \text{Arccos}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \text{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 (*). Simplifier l'expression suivante :

$$\text{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}).$$

Exercice 9 (*). Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \text{Arcsin}\frac{1-x^2}{1+x^2} + \text{Arccos}\frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 10. Calculer :

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^x(\text{ch}^3 x - \text{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}(x - \ln(\text{ch}x)).$$

Exercice 11 (*). Calculer ch3x et sh3x en fonctions de ch$x$ et sh$x$. En déduire $\tanh 3x$ en fonction de $\tanh x$.

Exercice 12 (*). Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arcsin}(4x^3 - 3x)$.

1) Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1, 1]$.

2) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[\setminus \{-1/2, 1/2\}$.

3)a) Vérifier que sur $[-1/2, 1/2]$, $f(x) = -3\text{Arcsin}(x)$.

b) En déduire que la restriction de f sur cet intervalle est une bijection de $[-1/2, 1/2]$ sur un intervalle à déterminer.

c) Donner l'expression de la réciproque.

d) Déduire de 3)a) la valeur de la dérivée à gauche de f au point $1/2$.

4)a) Montrer que sur $[1/2, 1]$, $f(x) = 3\text{Arcsin}(x) - \pi$.

b) La fonction f est-elle dérivable au point $1/2$?

Exercice 13. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}x.$$

a) Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1, 1]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.

c) Simplifier l'expression de f.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2\text{argch}\sqrt{\frac{1 + \text{ch}(x)}{2}}.$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f.

c) Calculer la dérivée de f pour $x > 0$. Calculer la dérivée de f pour $x < 0$.

d) Simplifier l'expression de f.

Exercice 15. Soit $f : [\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -3\sin^2(x) + 5$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera les domaines de définition et de dérivabilité.

b) Calculer g'.
