UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - FEUILLE 2
REVISIONS D'ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1 *1. On note* $B_3 = \{1, X, X^2\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$. $Mat_{B_3,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Ker*$(f) = Vect(X^2)$ *et Im*$(f) = \mathbb{R}^2$, *car* $f(1) = (1,0)$ *et* $f(X) = (0,1)$.
3. *Les 3 polynômes* P_1, P_2 *et* P_3 *sont linéairement indépendants et dim*$\mathbb{R}_2[X] = 3$ *donc* P_1, P_2 *et* P_3 *forment une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
4. $v_1 = (1,2)$ *et* $v_2 = (2,5)$ *sont deux vecteurs linéairement indépendants et dim*$\mathbb{R}^2 = 2$, *donc ils forment une base de* $\mathbb{R}^2$.
5. *On note* $B_3' = \{P_1, P_2, P_3\}$ *et* $B_2' = \{v_1, v_2\}$. $f(P_1) = (1,0) = 5(1,2) - 2(2,5)$, $f(P_2) = (1,1) = 3(1,2) - (2,5)$, $f(P_3) = (1,0) = 5(1,2) - 2(2,5)$. *Alors* $Mat_{B_3',B_2'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 1. (a) *On vérifie que* $f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)$ *et* $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$, *pour tous* (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. $Mat_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) *Ker*$(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ et } x = y\} = Vect(1,1,0)$. *Une base de Ker*$(f)$ *est* $u_1 = (1,1,0)$. *L'application* f *n'est pas injective. Puisque c'est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$, f *n'est pas surjective.*

2. *La formule du rang donne dimKer*(f) + *dimIm*$(f) = 3$. *Donc la dimension de Im*(f) *est* 2. *Les vecteurs* $u_2 = f(e_2) = (-1,1,0)$ *et* $u_3 = f(e_3) = (1,1,2)$ *appartiennent à Im*(f) *et sont linéairement indépendants, donc ils en forment une base.*
3. *On vérifie que* $f(u_2) = 2u_2$ *et* $f(u_3) = 2u_3$. *Donc Im*$(f) \subset$ *Ker*$(f - 2\mathrm{Id})$. *D'autre part* $Mat_\varepsilon(f - 2\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Donc Ker*$(f - 2\mathrm{Id})$ *est le plan vectoriel de dimension* 2, *d'équation* $x + y - z = 0$. *Comme Im*(f) *est de dimension* 2 *aussi, on en déduit que Im*(f) = *Ker*$(f - 2\mathrm{Id})$.
4. *Puisque* $u_1 \in$ *Ker*(f), u_1 *n'appartient pas à Ker*$(f - 2\mathrm{Id})$, *on en déduit que* $\chi = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. $D = Mat_\chi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. P *est la matrice de passage de* ε *à* χ. $P = Mat_{\chi,\varepsilon}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect((1,1,1);(0,1,1))$, $G = Vect((1,0,1))$. *On vérifie que* $F \cap G = \{0\}$. *dim*$F = 2$ *et dim*$G = 1$. *Donc dim*$(F + G) = 3$ *et* $E = F \oplus G$.
Tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *s'écrit de manière unique sous la forme* $(x,y,z) = (x + y - z)(1,1,1) + (z - x)(0,1,1) + (z - y)(1,0,1)$.
Donc si on note p_1 *la projection de* $\mathbb{R}^3$ *sur* F *parallèlement à* G *et* p_2 *la projection de* $\mathbb{R}^3$ *sur* G *parallèlement à* F, *on obtient :* $p_1(x,y,z) = (x + y - z)(1,1,1) + (z - x)(0,1,1) = (x + y - z, y, y)$ *et* $p_2(x,y,z) = (z - y)(1,0,1) = (z - y, 0, z - y)$.

Exercice 4 1. *Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f(x) \neq 0$. On sait que $f \circ f \circ f(x) = 0$. Vérifions que x, $f(x)$ et $f \circ f(x)$ sont linéairement indépendants. Soient λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$(*) \quad \lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \lambda_3 f \circ f(x) = 0.$$

Si on prend l'image de cette expression par $f \circ f$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Ensuite, si on prend l'image de $(*)$ par f on obtient $\lambda_2 = 0$. Et enfin on a $\lambda_3 = 0$. Donc $B = \{x, f(x), f \circ f(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, et $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *$Im(f) = Vect(f(x), f \circ f(x))$, de dimension 2. La dimension de $Ker(f)$ est 1 et $Ker(f) = Vect(f \circ f(x))$.*

Exercice 5 *Soit $Q \in E$. $Q(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$, où d est le degré de Q. Il existe $P \in E$ tel que $P'(X) = Q(X)$. En effet $P(X) = a_0 X + \frac{a_1}{2} X^2 + \ldots + \frac{a_d}{d+1} X^{d+1}$. Donc f est surjectif.*
Par contre f n'est pas injectif, car tout polynôme constant a une dérivée nulle.

Exercice 6 *Soit P un polynôme tel que $XP(X) = 0$. Alors nécessairement $P = 0$ et f est injectif. Par contre les polynômes constants n'appartiennent pas à Imf et f n'est pas surjectif.*

Exercice 7 *On vérifie que $A = \{$fonctions paires$\}$ et $B = \{$fonctions impaires$\}$ sont stables par combinaisons linéaires, donc ceux sont des s.e.v. de E.*
Toute fonction f de E s'écrit sous la forme : $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, *sur $\mathbb{R}$.*
La première fonction est paire et la seconde est impaire. De plus il est facile de vérifier qu'une fonction qui est à la fois paire et impaire est identiquement nulle. Donc $A \oplus B = E$.

Exercice 8 *Pour déterminer le rang des matrices suivantes, on utilise la méthode du pivot de Gauss.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 32 & 23 \\ 0 & 32 & 23 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & -7 & 10 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc $rgA = 3$, $rgB = 2$ et $rgC = 2$.

Exercice 9 *Pour calculer l'inverse des matrices suivantes, on utilise la méthode du pivot de Gauss.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \end{array}\right).$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3/2 & -5/2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 & -1/6 & 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 & -1/6 & 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1/2 & -3 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -9 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -5 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -9 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -5 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -9 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & -2 \\ -1/2 & -5 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10
1. *Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A. On a $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_4$ et $f(e_4) = e_1$. Puisque l'image par f de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base $\{e_2, e_3, e_4, e_1\}$, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et A est inversible.*
2. *On note $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$. Puisque $f^4(e_1) = e_1$, $f^4(e_2) = e_2$, $f^4(e_3) = e_3$ et $f^4(e_4) = e_4$, $A^4 = I_4$, la matrice identité 4×4. D'où $A^{-1} = A^3$.*

Exercice 11 $*$ *Si $A \cup B = A + B$, alors $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E.*
$*$ *Supposons que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E, que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A. Alors il existe deux vecteurs $u \in A \setminus B$ et $v \in B \setminus A$. $u + v \in A + B = A \cup B$. Or $u + v$ ne peut ni appartenir à A ni appartenir à B. Contradiction. Donc nécessairement $A \subset B$ ou $B \subset A$.*
$*$ *Si $A \subset B$ (ou $B \subset A$), alors $A \cup B = A + B = B$ (ou $= A$).*