Topologie et Analyse hilbertienne : Une Introduction Pragmatique

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY (JBHU)
Université Paul Sabatier de Toulouse

Table des matières

"De plus en plus, les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les relations entre certains être abstraits définis d'une manière arbitraire, sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradiction. Il faudrait toutefois ajouter, pour ne pas risquer de confondre les mathématiques, ni avec la logique, ni avec des jeux tel que le jeu d'échecs, que ces définitions ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec des objets réels ; tel le cas pour la ligne droite, pour le cercle, pour le corps solide de la mécanique rationnelle, etc. Mais les nombres imaginaires, les nombres transfinis, bien d'autres êtres mathématiques, sont de pures créations de l'esprit humain. Elles sont justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens ou les physiciens, et d'éclaircir les difficultés qu'ils avaient rencontrées."

Emile BOREL, La définitions en mathématiques, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Cahiers du Sud, 1948

Chapitre 1

Distances, Espaces métriques ; Normes, Espaces vectoriels normés ; Espaces préhilbertiens ; Introduction à la topologie générale

"Nothing is more practical than a good theory"

Von Helmholtz

"Analysis is the technically most successfull and best-elaborated part of Mathematics"

J. Von Neumann

1.1 Distances, Espaces métriques

1.1.1 Distances

Définition 1.1.1.1. *Une* ***distance*** *(ou* ***métrique****) sur E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ (attention ici !) vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. $(d(u,v) = 0) \Leftrightarrow (u = v)$ *[nullité sur la diagonale de $E \times E$, et seulement là]*
2. $\forall (u,v) \in E \times E,\ d(u,v) = d(v,u)$ *[symétrie]*
3. $\forall (u,v,w) \in E \times E \times E,\ d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ *[inégalité dite triangulaire]*

En général : ce sont "$\Rightarrow$" dans 1. et 3. qui demandent un travail de démonstration, les autres propriétés étant le plus souvent triviales à vérifier.

Propriété 1.1.1.2.

1. $\forall (u,v,w) \in E \times E \times E,\ d(u,v) \geq \mid d(u,w) - d(w,v) \mid$ *[inégalité triangulaire dans l'autre sens]*
2. $\forall (u_1, ..., u_p) \in E \times ... \times E,\ d(u_1, u_p) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} d(u_k, u_{k+1}).$

Ces propriétés sont très faciles à démontrer.
Une technique de majoration très utile : quand on a à majorer $d(u,v)$, introduire un troisième élément $a \in E$ (à choisir convenablement) de sorte que $d(u,v) \leq d(u,a) + d(a,v)$.

Exemples de distances

1. La tout à fait classique distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:
$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \mapsto d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$
2. Distance (dite) discrète (sur E quelconque) :
$$(u,v) \mapsto d(u,v) := \begin{cases} 1 & si \quad u \neq v, \\ 0 & si \quad u = v. \end{cases}$$
Drôle de "distance" !... Utile pour des exemples et contre-exemples, et montrer qu'une distance n'est pas toujours quelque chose d'aussi intuitif que dans l'exemple 1..
3. Soit E l'espace $\mathbb{R}$ auquel on a adjoint $-\infty$ et $+\infty$.
On pose :
$$\forall (u,v) \in E \times E,\ d(u,v) := \mid \varphi(u) - \varphi(v) \mid,$$
où $\varphi(u) := \arctan(u)$ si $u \in \mathbb{R}$, $\varphi(+\infty) := \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi(-\infty) := -\dfrac{\pi}{2}$.
Au fait... comment est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto y = \arctan(x)$?

1.1.2 Espaces métriques

Définition 1.1.2.1. *Un **espace métrique** (ou **distancié**) est un couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une distance d sur E.*

Attention ! Sur un **même** espace E on peut définir **plusieurs** distances d_i, cela donne des espaces métriques **différents**... Si la distance d utilisée sur E ne fait aucun doute, on peut se dispenser de la noter.

Distances équivalentes

Définition 1.1.2.2. *Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites **équivalentes** s'il existe des constantes $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ telles que :*

$$\forall (u, v) \in E \times E, \ \ c_1 d_1(u, v) \leq d_2(u, v) \leq c_2 d_1(u, v).$$

En bref, "tout ce que l'on peut faire avec d_1 peut aussi être fait avec d_2". Vérifier que sur l'ensemble de toutes les distances possibles sur E, la relation "d_1 est équivalente à d_2" est effectivement une relation d'équivalence (c'est-à-dire ?).

Exercice 1.1.2.3. *Considérons la sphère en 3D de centre 0 et de rayon r, notée E. Pour A et B deux points de cette sphère E, on pose :*
$d_1(A, B) :=$ longueur (euclidienne) de la corde joignant A à B ;
$d_2(A, B) :=$ longueur (euclidienne) du plus petit arc (sur la sphère) joignant A à B.
Montrer que d_1 et d_2 dont équivalentes sur E, et déterminer les meilleures constantes c_1 et c_2 de l'encadrement (cf. Définition 1.1.2.2).
Un dessin et un peu de trigonométrie s.v.p. !

Exercice 1.1.2.4. *Soit d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur E, soit (u_k) une suite d'éléments de E, soit $u \in E$. Vérifier :*

$$(d_1(u_k, u) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0) \Leftrightarrow (d_2(u_k, u) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0).$$

Distances "naturelles" sur un produit cartésien fini

Soit (E_1, d_1), (E_2, d_2), ..., (E_n, d_n) n espaces métriques. On définit "naturellement" sur $E := E_1 \times ... \times E_n$

$$\delta_1(u, v) := d_1(u_1, v_1) + ... + d_n(u_n, v_n),$$

$$\delta_2(u, v) := \sqrt{[d_1(u_1, v_1)]^2 + ... + [d_n(u_n, v_n)]^2},$$

$$\delta_\infty(u, v) := \max\{d_1(u_1, v_1), ..., d_n(u_n, v_n)\},$$

où $u = (u_1, ..., u_n) \in E, \ v = (v_1, ..., v_n) \in E$.
On peut vérifier (aisément) que δ_1, δ_2 et δ_∞ sont des distances sur E et (plus laborieusement) qu'elles sont équivalentes deux à deux. Ca vous rappelle des choses, non ?

Exercice 1.1.2.5.

- *Définir dans* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ *les distances* δ_1, δ_2 *et* δ_∞ *à partir de* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto d(x, y) :=\mid x - y \mid$.
- *Dessiner dans le plan les trois ensembles* $S_i := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \delta_i((u_1, u_2), (0, 0)) \leq 1\}$.
- *Dénombrer le nombre de sommets des deux polyèdres convexes* $S_1^{(n)} := \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n : \delta_1((u_1, ..., u_n), (0, ..., 0)) \leq 1\}$, $S_\infty^{(n)} := \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n : \delta_\infty((u_1, ..., u_n), (0, ..., 0)) \leq 1\}$ *et comparer le comportement de ces deux nombres quand* $n \to +\infty$.

Exercice 1.1.2.6. *Distance de* HÖLDER[1] *sur* $\mathbb{R}^n$. *Soit* p *un réel* ≥ 1 *(c'est tout ce qu'on lui demande !) ; on pose :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \delta_p(u, v) := \left(\sum_{i=1}^{n} \mid u_i - v_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Vérifier que* δ_p *définit une distance sur* $\mathbb{R}^n$ *(pas très facile) appelée distance de* HÖLDER *sur* $\mathbb{R}^n$.
- *Montrer que toutes les distances de* HÖLDER *sont équivalentes entre elles.*
- *Montrer*
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n,\ \lim_{p \to +\infty} \delta_p(u, v) = \delta_\infty(u, v)$$
[ce qui explique l'indice ∞ *utilisé].*

Question : Quand on a des majorations ou des minorations à faire dans $E = E_1 \times ... \times E_n$, en vue d'un passage à la limite par exemple, quelle distance δ_p doit-on choisir (puisqu'elles sont toutes équivalentes entre elles) ? Réponse : Celle qui facilite momentanément la majoration ou minoration et qui rend plus facile le passage à la limite désiré. Reconnaissons qu'à cet égard δ_1 et δ_∞ sont bien pratiques.

Applications d'un espace métrique dans un autre

Soit (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, soit $f : E \to F$.

Définition 1.1.2.7.
- *On dit que* f *est une* ***isométrie*** *lorsque :*
$$\forall (u, v) \in E \times E,\ \delta[f(u), f(v)] = d(u, v)$$
(la distance de u *à* v *(dans* E*) est la même que la distance entre les images* $f(u)$ *et* $f(v)$ *(dans* F*), ce qui explique la terminologie ; du grec... ?)*
- *On dit que* E *et* F *sont* ***isométriques*** *s'il existe une* <u>*bijection*</u> $f : E \to F$ *qui soit une isométrie.*
(une isométrie est automatiquement injective, d'accord ? On demande donc ici que f *soit aussi surjective).*

1. Otto HÖLDER (1859 - 1937), mathématicien allemand. Partage avec son compère R. LIPSCHITZ d'avoir laissé son nom à des propriétés de fonctions.

- *f est dite* ***lipschitzienne*** *(ou vérifiant une condition de* LIPSCHITZ[2]*) de constante (ou rapport) L lorsque :*

$$\forall (u,v) \in E \times E,\ \delta(f(u), f(v)) \leq L d(u,v).$$

Si $L < 1$ on dit que f est ***contractante*** *(ou est une* ***contraction****).*

Si (E,d) et (F,δ) sont isométriques, ils sont indiscernables du point de vue de la théorie des espaces métriques, puisque toutes les propriétés sont les mêmes, mais leurs éléments peuvent être de nature très différente. Cela conduit éventuellement les mathématiciens à identifier E et F, et à parler d'espaces (métriques) définis "à une isométrie près".

Exercice 1.1.2.8. ***Fonction distance à un ensemble.***
Soit (E,d) un espace métrique et $\emptyset \neq A \subset E$. Pour $x \in E$ on note $d_A(x)$, et on appelle distance de x à A, le réel $d_A(x) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.
En général il n'existe pas un $\overline{a} \in A$ tel que $d_A(x) = d(x, \overline{a})$, ***erreur ô combien fréquente !***
Montrer :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \mid d_A(x) - d_A(y) \mid \leq d(x,y).$$

Résultat facile à démontrer mais surprenant car on ne demande rien comme propriété à A !

Exercice 1.1.2.9. ***Prolongement lipschitzien.***
Soit (E,d) un espace métrique et $\emptyset \neq A \subset E$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ lipschitzienne sur A de constante L. On définit g sur E comme suit :

$$\forall x \in E, g(x) := \inf\{f(a) + L d(a,x)\}.$$

Démontrer que g est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ (à valeurs finies donc), lipschitzienne sur tout E de constante L, et dont la restriction à A est égale à f.
Etonnant qu'on puisse faire si facilement un prolongement lipschitzien de f à tout l'espace !

1.1.3 Quelques notions définies à l'aide d'une distance

On définit dans un espace métrique (E,d) un certain nombre de notions inspirées de la géométrie du plan (2D) et de l'espace (3D) ordinaires.

Définition 1.1.3.1. *Etant donné $a \in E$ et $r \geq 0$:*
$B(a,r) := \{x \in E : d(a,x) < r\}$ appelée ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r ;*
$B_f(a,r) := \{x \in E : d(a,x) \leq r\}$ appelée ***boule fermée*** *de centre a et de rayon r ;*
$S(a,r) := \{x \in E : d(a,x) = r\}$ appelée ***sphère*** *de centre a et de rayon r.*

Exercice 1.1.3.2. *Soit p un entier ≥ 1. Tracer sur une même figure les courbes*
$C_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^p + y^p = 1\}$ pour $p = 1, 2, 3, 20$.
P. FERMAT *et* A. WILES *(1994) nous disent que C_p ne rencontre pas $\mathbb{Q}^2$ (points de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées rationnelles) dès que $p \geqslant 3$.*
Constater sur votre dessin que c'est absolument stupéfiant !

2. Il y a bien un S, un C et un Z... Rudolph LIPSCHITZ (1832 - 1903) est un mathématicien allemand dont les travaux ont concerné l'Analyse et la Géométrie. On le retrouvera dans le fameux théorème de CAUCHY et LIPSCHITZ du Cours sur les Equations différentielles.

Définition 1.1.3.3. *Soit A une partie de (E,d).*

1. *On dit que a ($\in E$) est **adhérent** à A lorsque*

$$\forall r>0, B(a,r)\cap A\neq\emptyset.$$

   *L'ensemble des points adhérents à A se note $\overline{A}$ et est appelée **l'adhérence** (ou la **fermeture** de A).*
   *(Evidemment $A\subset\overline{A}$). Lorsque $A=\overline{A}$, on dit que A est **fermée** (ou est **un fermé** de E).*
2. *On dit que a ($\in E$) est **intérieur** à A lorsque : $\exists r>0$ tel que $B(a,r)\subset A$.*

   *L'ensemble des points intérieurs à A se note $\mathring{A}$ et est appelée **l'intérieur** de A[3].*

   *(Evidemment $\mathring{A}\subset A$). Lorsque $\mathring{A}=A$, on dit que A est **ouverte** (ou est **un ouvert** de E).*
3. *Les éléments de $\overline{A}\backslash\mathring{A}$ sont les éléments frontières de A ; $\overline{A}\backslash\mathring{A}$ s'appelle la **frontière** de A ; elle est notée frA ou ∂A.*

$\emptyset$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées [ce n'est pas comme les portes !]. Une "boule ouverte" est ouverte (pardi !)...

Signalons quelques propriétés immédiates, qui dérivent des définitions mêmes énoncées ci-dessus.

Propriété 1.1.3.4.

1. *A est fermée si et seulement si A^c (complémentaire de A dans E) est ouverte (et donc A est ouverte si et seulement si A^c est fermée).*
2. *$a\in\overline{A}$ si et seulement si $d_A(a)=0$.*
3. *$int(\mathring{A})=\mathring{A}$, $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.*

Démonstration du point 2.

[$\Longrightarrow$] . Soit $a\in\overline{A}$. Pour tout entier $n\geq 1$, il existe $a_n\in B(a,\frac{1}{n})\cap A$; on a donc :

$$d_A(a)\leq d_A(a_n)<\frac{1}{n},$$

d'où, en passant à la limite quand $n\to+\infty$, $d_A(a)=0$.

[$\Longleftarrow$] . Soit a tel que $d_A(a)=0$. Par définition même de inf (c'est-à-dire ?), pour tout $r>0$, il existe $u\in A$ tel que $d(a,u)<r$, d'où $u\in B(a,r)\cap A$.

■

Ainsi $d_A=d_{\overline{A}}$ (la fonction distance à A ne sait pas faire la différence entre A et $\overline{A}$). Par ailleurs, d_A ne permet pas de différencier $\mathring{A}$ et frA, il faudra donc trouver autre chose.

3. $intA$ est aussi une notation utilisée pour l'intérieur de A

Définition 1.1.3.5. *Soit A une partie de (E,d). On dit que A est **bornée** (ou est **un borné** de E) si A est contenue dans une certaine boule $B(a,r)$ (ou $B_f(a,r')$). Autrement dit, s'il existe r' tel que*

$$\forall u \in A,\ d(a,u) \leq r'.$$

C'est une définition assez naturelle, on ne voit pas ce qu'on aurait pu imaginer d'autre... Autre façon de voir les choses : le **diamètre** de $A \subset E$ est le nombre réel (≥ 0) défini comme suit :

$$diam A := \sup\{d(a,b) : a \in A \text{ } et \text{ } b \in A\} \quad (\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}).$$

C'est un exercice facile que de démontrer :

$$(A \text{ bornée}) \Leftrightarrow (diam A < +\infty).$$

Attention ! La notion d'espace métrique (E,d) est très générale, on ne demande rien comme structure à E (pas même d'être un espace vectoriel). Attention aux résultats que l'intuition guidée par la métrique euclidienne usuelle pourrait suggérer... il y a des bizarreries dans les espaces métriques, s'en tenir aux définitions données.

1.2 Normes, Espaces vectoriels normés.

1.2.1 Normes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.2.1.1. *Une **norme** sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *$(N(u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$ [nullité en 0, et uniquement en ce point]*
2. *$\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda u) = \mid \lambda \mid N(u)$ [homogénéité]*
3. *$\forall (u, v) \in E \times E,\ N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ [inégalité dite triangulaire ou de sous-additivité].*

En général : ce sont "$\Rightarrow$" dans les exigences 1. et 3. qui posent des difficultés de vérification, les autres étant souvent triviales ou simples.
Notations pour une norme : avec un graphisme rappelant la valeur absolue ou le module, par exemple $\mid . \mid$, $\|.\|$, et même $|||.|||$. Dorénavant nous utiliserons $\|.\|$.

Définition 1.2.1.2. ***Distance associée à une norme.***
De manière naturelle on associe à une norme $\|.\|$ sur E une distance d sur E par le biais suivant :

$$\forall (u, v) \in E \times E,\ d(u, v) := \|u - v\|.$$

*Cette distance est dite **associée à la norme** $\|.\|$.*

Vérification : Elle ne présente aucune difficulté.
Donc, tout ce qui a été exposé précédemment concernant les distances s'applique aux normes... Néanmoins, la distance associée à une norme vérifie des propriétés particulières que n'a aucune raison de posséder une distance quelconque sur E. Si d est une distance sur E, il n'est pas (toujours) vrai que d dérive d'une norme via la construction de la Définition 1.2.1.2. Eh oui c'est comme ça...

Propriété 1.2.1.3.

1. *$\forall (u, v) \in E \times E,\ \|u - v\| \geq \mid \|u\| - \|v\| \mid$ **[très utile pour des minorations]***
2. *$\forall (u_1, ...u_n) \in E \times ... \times E,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid \|u_i\|$*

   *[c'est plus que la **convexité** de la fonction $\|.\|$].*

Exemples de normes.

Exemple 1.2.1.4. *Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, étant donné un réel $p \geq 1$,*

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

appelées normes de Hölder.

Exemple 1.2.1.5. *Voici plusieurs normes sur $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$,*

$$\begin{aligned} A = [a_{ij}] \mapsto \|A\| &:= \max_j \left(\sum_i \mid a_{ij} \mid \right) \\ \|A\| &:= \max_i \left(\sum_j \mid a_{ij} \mid \right) \\ \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j} \mid a_{ij} \mid^2} = \sqrt{tr(A^*A)} \quad [\textbf{importante !}] \end{aligned}$$

(A^* est la conjuguée de A^T ; elle est parfois appelée la transconjuguée de A)..

Certaines normes $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

d'autres pas...

Exemple 1.2.1.6. *Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} f \mapsto \|f\|_1 &:= \int_a^b \mid f(t) \mid dt \quad [\textit{appelée norme de la moyenne}] \\ \|f\|_2 &:= \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2 dt} \quad [\textit{norme de la moyenne quadratique}] \\ \|f\|_\infty &:= \max_{t\in[a,b]} \mid f(t) \mid \quad [norme\ uniforme,\ ou\ du\ \sup,\ ou\ de\ Tchebychev]. \end{aligned}$$

1.2.2 Espaces vectoriels normés.

Définition 1.2.2.1. *Un* ***espace vectoriel normé*** *réel (resp. complexe) est un couple $(E, \|.\|)$ constitué d'une espace vectoriel réel (resp. complexe) et d'une norme $\|.\|$ sur E.*

Notation abrégée : **e.v.n.** Autre terminologie usitée : espace normé ; mais on s'évitera (bien) des déboires en disant systématiquement *espace vertoriel normé*, rappelant ainsi qu'il s'agit toujours d'un espace vectoriel.

Normes équivalentes.

Définition 1.2.2.2. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont dites* ***équivalentes*** *s'il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que :*

$$\forall u \in E,\ c_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2\|u\|_1.$$

Comme on s'en serait douté, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont équivalentes.

Exercice 1.2.2.3. *Vérifier que dans l'e.v.n. $(E, \|.\|)$:*

$$B(a, r) = a + B(0, r),\ B(0, r) = rB(0, 1).$$

Résultats similaires pour $B_f(a, r)$ et $S(a, r)$.

Exercice 1.2.2.4. *Dans l'Exemple 1.2.1.6, démontrer qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que :*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leq c\|f\|_2 \leq C\|f\|_\infty,$$

mais qu'aucune de ces trois normes n'est équivalente à l'une des deux autres. Tiens, tiens...

Exercice 1.2.2.5. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et p un réel ≥ 1. On pose :*

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b \mid f(t) \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur E.*
- *Montrer que $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ ne sont pas équivalentes si $p \neq q$.*
- *Démontrer que $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.*

Exercice 1.2.2.6. *Démontrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (deux à deux).*

Ind. *Utiliser les propriétés des fonctions continues de plusieurs variables et le fait que les sphères de rayon 1 sont compactes (i.e. fermées et bornées).*

1.2.3 D'autres exemples importants d'e.v.n.

Exemple 1.2.3.1. *Soit E un ensemble quelconque ; on note $\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de toutes les applications $f : E \to \mathbb{K}$ qui sont* ***bornées*** *sur E (($f \in \mathcal{B}(E,\mathbb{K})$) signifie donc ($\exists M$ tel que $\mid f(x) \mid \leq M$ pour tout x)).*
On pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} \mid f(x) \mid .$$

$\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$, appelée norme uniforme, du sup*, ou de* TCHEBYCHEV.

$(\mathcal{B}(E,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un e.v.n. grand fourre-tout car beaucoup d'e.v.n. usuels sont des sous-espaces de cet e.v.n..
Par exemple, si $E = \mathbb{R}^n$ et S est un compact de $\mathbb{R}^n$, $(\mathcal{C}(S,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un sous-espace de $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$. Voir pour $n = 1$ le troisième exemple dans Exemple 1.2.1.6.

Exemple 1.2.3.2. *Cas particulier du précédent en prenant $E = \mathbb{N}$.*
On note classiquement $l^\infty(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des ***suites*** *(à valeurs dans $\mathbb{K}$)* ***bornées****, avec :*

$$\forall x = (x_1, ...x_n, ...),\ \|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \mid .$$

De même :
$c(\mathbb{K})$ le s.e.v. de $l^\infty(\mathbb{K})$ des ***suites convergentes*** *;*
$c_0(\mathbb{K})$ le s.e.v. de $c(\mathbb{K})$ (donc de $l^\infty(\mathbb{K})$) des suites convergentes de limite 0 ;
$c_{00}(\mathbb{K})$ le s.e.v. de $c_0(\mathbb{K})$ (donc de $l^\infty(\mathbb{K})$) des suites dont le terme général est nul à partir d'un certain rang.
Comme on l'a déjà noté,

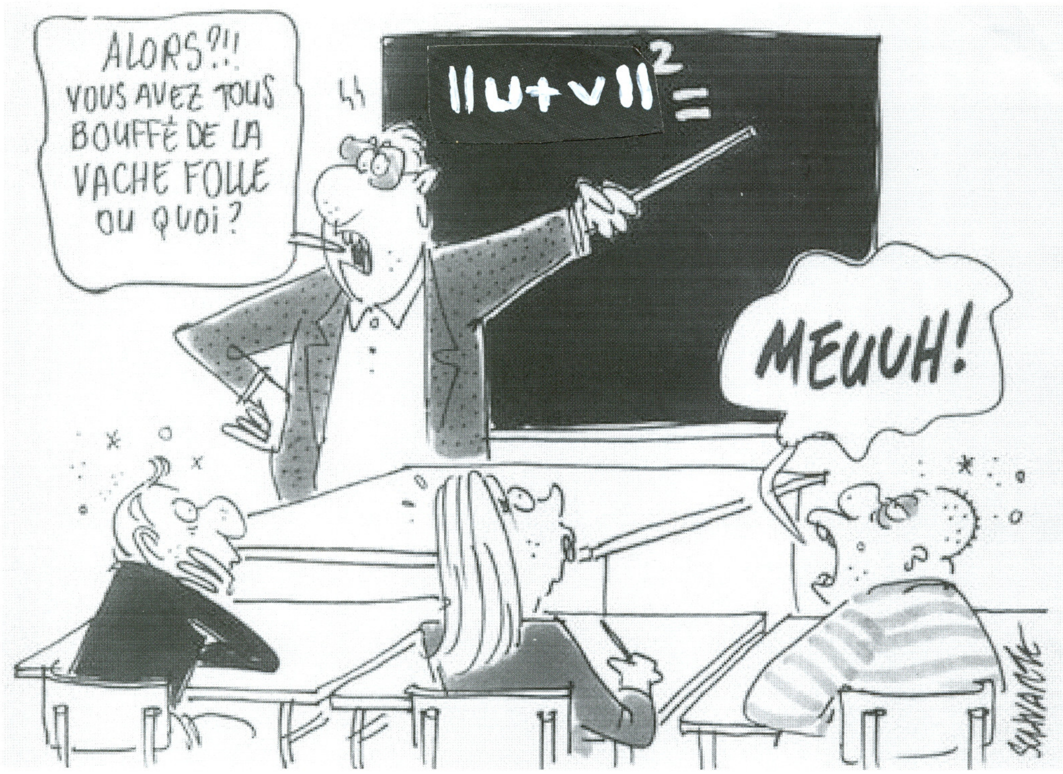
$$c_{00}(\mathbb{K}) \subset c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K}) \subset l^\infty(\mathbb{K}).$$

Exemple 1.2.3.3. *Etant donné un réel $p \geq 1$, on note $l^p(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites (à valeurs dans $\mathbb{K}$) de* ***puissance p-ième sommable****, i.e. telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p < +\infty$. On munit $l^p(\mathbb{K})$ de la norme*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le cas où $p = 2$, soit $l^2(\mathbb{K})$, s'avèrera particulièrement important dans la suite.

En passant des espaces métriques aux e.v.n. on a fait un grand saut qualitatif ; on pourra notamment faire sur un e.v.n. E tout ce qu'on peut faire sur un espace vectoriel, parler de formes linéaires sur E par exemple. De plus, des pathologies qui se produisaient dans les espaces métriques ne se produisent plus dans les e.v.n. ; méditer à titre d'exemple sur le résultat suivant : Dans un e.v.n. l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $B_f(a, r)$, et l'intérieur de la boule fermée $B_f(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$ (ce qui n'est pas toujours vrai dans un espace métrique !).



1.3 Espaces préhilbertiens

Dans cette partie nous préférons distinguer le cas réel et le cas complexe : les deux cas présentent des particularités importantes.

1.3.1 Cas des espaces vectoriels réels

Définition 1.3.1.1. *Un **produit scalaire** sur l'espace vectoriel E est **une forme bilinéaire symétrique et définie positive**, c'est-à-dire une application bilinéaire symétrique $b : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ (ce qui signifie ?) vérifiant :*

1. $\forall u \in E$; $b(u,u) \geq 0$, [positivité]

2. $(b(u,u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$, [b est définie].

En fait, "$\Leftarrow$" est déjà assurée dans l'exigence 2. (pourquoi ?). Pour un produit scalaire, au lieu de b, on utilise les notations $(. \mid .)$, $(. \mid .)_E$ (si on sent la nécessité de préciser l'espace de travail), $((. \mid .))$, $< . \mid . >$, etc. Nous, nous utiliserons $< . \mid . >$ ou $(. \mid .)$.
$< u, v >$ est le produit scalaire de u et v, et se lit souvent "u scalaire v".

Définition 1.3.1.2. *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $< . \mid . >$. On associe à ce produit scalaire une norme (dite **associée** à $< . \mid . >$ ou **dérivée** de $< . \mid . >$) en posant :*

$$\forall u \in E,\ \|u\| := \sqrt{< u \mid u >} \qquad (\text{ soit } \|u\|^2 =< u \mid u >)$$

Bien sûr, il peut y avoir plusieurs produits scalaires sur un même E. De même il peut y avoir sur E des normes qui ne sont pas dérivées d'un produit scalaire. On montrera un peu plus loin que $\|.\|$ introduite au-dessus est effectivement une norme.

Exemple 1.3.1.3. *Dans $l^2(\mathbb{R})$, $< x, y >:= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$. La norme associée à ce produit scalaire est $\|.\|_2$ (cf. Exemple 1.2.3.3.)*

Exemple 1.3.1.4. *Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $< f, g >:= \int_a^b f(t)g(t)dt$. La norme associée est $\|.\|_2$ (cf. Exemple 1.2.2.5.).*

Exemple 1.3.1.5. *Dans $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$,*

$$< f, g >_1 = \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f'(t)g'(t)dt.$$

Exemple 1.3.1.6. *Dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $< A, B >:= tr(A^T B)$ (produit scalaire fondamental !). Noter que si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$, $< A, B >$ est $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$; ce produit scalaire n'est donc pas une surprise !*

L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz [4].

Théorème 1.3.1.7. *Soit $< .,. >$ un produit scalaire et $\|.\| = \sqrt{< .,. >}$. Alors :*

$$\forall (u,v) \in E \times E, \ \ |< u,v >| \leq \|u\|.\|v\|$$

(ou encore $(< u,v >)^2 \leq \|u\|^2.\|v\|^2$)
De plus (pour $u \neq 0$) on a égalité si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v = \alpha u$.

Démonstration

- Soit $(u,v) \in E \times E$. Considérons

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = \|u + tv\|^2.$$

  On sait que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en raison de l'exigence 1. de la Définition 1.3.1.1.)
  Mais $\|u+tv\|^2 =< u+tv, u+tv >= \|v\|^2 t^2 + 2t < u,v > + \|u\|^2$.
  Si $v = 0$, l'inégalité souhaitée est trivialement vérifiée
  Si $v \neq 0$, $g(t)$ est un (vrai) trinôme du second degré en t, et il est partout ≥ 0 si et seulement si $\Delta = 4(< u,v >^2 - \|u\|^2 \|v\|^2) \leq 0$ (Δ est le... euh... du trinôme). D'où l'inégalité annoncée.
- Si $v = \alpha u$, $< u,v >= \alpha \|u\|^2$ tandis que $\|u\| \|v\| =| \alpha | \ \|u\|^2$; on a bien égalité dans l'inégalité démontrée.
  Si $|< u,v >|= \|u\|^2 \|v\|^2$, le trinôme g a une racine double ; c'est-à-dire il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|v\|^2 t_0^2 + 2t_0 < u,v > + \|u\|^2 = 0.$$

  Cela signifie que $\|u + t_0 v\| = 0$ (*cf.* supra), d'où $u + t_0 v = 0$, soit $v = \dfrac{-1}{t_0} u$ ($t_0 = 0$ donnerait $u = 0$, ce qui a été écarté.).

$\blacksquare$

Démonstration du fait que $\|.\| = \sqrt{< .,. >}$ est une norme.
Il n'y a véritablement que l'inégalité triangulaire à démontrer.
En fait :

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2 < u,v > + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|.\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

d'où $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

$\blacksquare$

4. Schwarz s'écrit sans T ! S'il y a plusieurs mathématiciens du nom de Schwartz, celui-ci est le mathématicien allemand Herman A. Schwarz (1843 - 1921).
Si A.-L. Cauchy démontra le premier une inégalité de ce type dans $\mathbb{R}^n$, une version plus générale fut donnée par le russe V. Bouniakovski (1804 - 1889), puis la forme générale par H.A. Schwarz.

Quelques identités remarquables.

1. $\forall(u,v) \in E\times E$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2+2 < u,v > +\|v\|^2$ [développement d'une somme], ou encore $< u,v >= \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ [1^{re} identité de polarisation].
2. $\forall(u,v) \in E \times E$, $< u,v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ [2^{me} identité de polarisation]
3. $\forall(u,v) \in E\times E$, $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$ [identité "du parallélogramme"].
4. $\forall(u,a,b) \in E \times E \times E$, $\|u-a\|^2 + \|u-b\|^2 = 2\|u - \frac{a+b}{2}\|^2 + \frac{\|a-b\|^2}{2}$ [identité "de la médiane"].

La première identité remarquable est à connaître parfaitement et il faudra savoir l'utiliser de manière routinière. N'importe quelle norme sur E ne vérifie pas ça, loin s'en faut !
Exemple d'utilisation de la première identité remarquable (pour le calcul différentiel) :

$$\frac{\|u+td\|^2 - \|u\|^2}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2 < u,d > .$$

Les noms dont sont affublées les identitées 3. et 4. viennent de la géométrie élémentaire du plan ; justifiez-les en faisant des petits dessins

Définition 1.3.1.8. *On appelle **espace préhilbertien réel** le couple constitué par un espace vectoriel E et par un produit scalaire $< .,. >$ sur E. On le notera $(E, < .,. >)$.*

Il a été étudié en 1^{er} cycle (en L2) les espaces préhilbertiens réels de dimension finie, ils étaient (et restent) appelés **espaces euclidiens**.

1.3.2 Cas des espaces vectoriels complexes

Définition 1.3.2.1. *Un **produit scalaire hermitien** sur un espace vectoriel complexe E est une fonction $h : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant :*

1. *$\forall u \in E$, $h(u,.)$ est **linéaire**,*
2. *$\forall v \in E$, $h(.,v)$ est **semi-linéaire**,*
3. *$\forall(u,v) \in E \times E$, $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$ [h est **hermitienne**]*
4. *$\forall u \in E$, $h(u,u) \geq 0$; [h est **positive**]*
   *$(h(u,u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$ [h est **définie**].*

Les points 1. et 2., ensemble, définissent que h est une forme sesquilinéaire [5].

La propriété 2. signifie : $\forall(u,v,w) \in E \times E \times E$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} h(\lambda u, v) &= \overline{\lambda} h(u,v), \\ h(u+v,w) &= h(u,w) + h(v,w). \end{aligned}$$

La semilinéarité à gauche (mais qu'on aurait pu prendre à droite) est plus courant en Physique et dans les Sciences de l'Ingénieur.

5. sesqui = un et demi.

Le couple constitué par un espace vectoriel complexe et par un produit scalaire hermitien s'appelle un **espace préhilbertien complexe**. Quand ils sont de dimension finie, ces espaces sont appelés **espaces hermitiens**.
Pour une grande part, la théorie des espaces préhilbertiens complexes se développe comme celle des espaces préhilbertiens réels : il faut mettre des barres de conjugaison là où il faut, faire apparaître la partie réelle $\Re$ (des nombres complexes), la partie imaginaire $\Im$ (des nombres complexes) occasionnellement. On pourra démontrer à titre d'exercice l'inégalité de C-B-S, ainsi que construire la norme associée.
La théorie complexe s'avère indispensable dans certains domaines : celui des valeurs propres d'opérateurs, la Physique quantique (avec des espaces préhilbertiens complexes de dimension infinie), le traitement du signal, etc.

Exercice 1.3.2.2. *Dans un espace préhilbertien complexe $(E, <.,.>)$, démontrer :*

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in E \times E,\ \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(<x,y>)\\ 4<u,v> &= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|v+iu\|^2 - i\|v-iu\|^2.\end{aligned}$$

[identité (dite) de polarisation].

Exemple 1.3.2.3. *Dans $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $<A,B>:= tr(A^*B)$.*

Exemple 1.3.2.4. *Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, $<f,g>:= \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt$.*

Exemple 1.3.2.5. *Dans $l^2(\mathbb{C})$, $<x,y>:= \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$.*

1.3.3 Orthogonalité. Théorème de Pythagore

Sans perte véritable de généralité on peut revenir aux espaces préhilbertiens réels $(E, <.,.>)$.

Définition 1.3.3.1. *On dit que u et v (éléments de E) sont* ***orthogonaux*** *lorsque leur produit scalire est nul, c'est-à-dire : $<u,v>= 0$.*
Notation parfois utilisée pour cela : $u \perp v$.

Exercice 1.3.3.2. *Démontrer : $(u \perp v) \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R},\ \|u\| \leq \|u+tv\|)$.*

Cela nous permettrait de définir $u \perp v$ dans tout e.v.n.... mais bôôf...

Théorème de Pythagore $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *si et seulement si $u \perp v$.*

Démonstration Immédiate à partir de la première identité remarquable. ■
Pythagore ne connaissait évidemment pas les espaces préhilbertiens... Cette propriété, étudiée dans le plan en classes de collèges, était connue bien avant Pythagore.

Exercice 1.3.3.3. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard noté $<.,.>$. Donner des exemples d'endomorphismes f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$(u \perp v) \Rightarrow (f(u) \perp f(v)).$$

Définition 1.3.3.4. *Soit A une partie non vide de E. On note $A^\perp$ l'ensemble des $v \in E$ qui sont orthogonaux à* ***tous*** *les éléments de A. On appelle cet ensemble* ***l'orthogonal de*** *A.*

$A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel (cela est facile à vérifier), et $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$ contient toujours A. On reviendra là-dessus plus tard (au Chapitre 6)

Définition 1.3.3.5. *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de l'espace préhilbertien $(E, <.,.>)$ est dite* ***orthonormale*** *lorsque :*

$$\begin{cases} \|u_i\| = 1 & \textit{pour tout} \quad i \in I; \\ < u_i, u_j >= 0 & \textit{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

L'étudiant-lecteur a déjà vu de tels exemples en dimension finie... La nouveauté ici est que la famille $(u_i)_{i\in I}$ peut (et sera usuellement) infinie.

Les espaces préhilbertiens (réels ou complexes) sont des espaces topologiques importants dans les applications (des mathématiques), sinon les plus importants. Nous aurons l'occasion d'y revenir à maintes reprises.
Jusqu'à présent nous avons vu (ou revu), dans l'ordre croissant de généralité, les classes d'espaces topologiques suivants :

Espaces euclidiens (Espaces hermitiens)	$\rightarrow$	Espaces préhilbertiens (réels, complexes)	$\rightarrow$	Espaces vectoriels normés (réels, complexes)	$\rightarrow$	Espaces mé-triques

Cela suffit-il à notre bonheur ? Eh bien non... On ne peut décrire "tout ce qui est topologique" à l'aide de la notion de distance seule. Prenons un exemple simple : dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on sait ce que signifie "$f_n \longrightarrow f$ simplement [6] sur $[a,b]$" (*i.e.*, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$) ; cette manière de faire converger f_n vers f (notion topologique donc), qui est la **première** notion de convergence à avoir été définie sur des espaces de fonctions (comme $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, bien avant la convergence uniforme, ne peut être décrite à l'aide d'une distance (alors que la notion de convergence uniforme l'est !). Il nous faut donc dire quelques mots des espaces topologiques généraux.

6. On dit aussi "$f_n \longrightarrow f$ ponctuellement (ou point par point)" [pointwise convergence en Anglais].

1.4 Introduction à la Topologie générale

A passer en première lecture, car hors programme.

1.4.1 Définition d'une topologie à partir de voisinages

Pour tout $a \in E$ on définit une famille $\mathcal{V}(a)$ de parties de E contenant a, telle que la collection $\{\mathcal{V}(a)\}_{a \in E}$ vérifie les propriétés suivantes : (a quelconque dans E)

1. Si $V_1 \in \mathcal{V}(a)$ et que $V_1 \subset V_2$, alors $V_2 \in \mathcal{V}(a)$;
2. Si V_1 et $V_2 \in \mathcal{V}(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$;
3. $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \in \mathcal{V}(b)$ pour tout $b \in W$.

$\mathcal{V}(a)$ s'appelle **la famille des voisinages de** a. Contempler quelques secondes les exigences 1. à 3. pour constater que ces axiomes sont assez naturels pour exprimer que "u est voisin de a" ($i.e.$ $u \in V \in \mathcal{V}(a)$).
Seul l'axiome "d'interactivité" 3. mérite un commentaire : "si u est voisin de a, il est aussi voisin de voisins de b de a".
Si on est capable de définir $\{\mathcal{V}(a)\}_{a \in E}$ vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus, on dit qu'on a défini une topologie (notée τ) sur E. Le couple (E, τ) est un espace topologique (général). Ensuite on définit :

- les ouverts de (E, τ) en disant ceci : A est un ouvert (pour la topologie τ) si A est voisinage de chacun de ses points, $i.e.$: $\forall a \in A,\ A \in \mathcal{V}(a)$.
- les fermés de (E, τ) en disant : F est un fermé si F^c est un ouvert, ou bien : F est fermé si pour tout $a \in F$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $F \cap V \neq \emptyset$.

Une fois qu'on a ça, on a tout ce qu'il faut pour travailler avec la topologie τ.

Exemple 1.4.1.1. *Dans un espace métrique (E, d), pour $a \in E$ on définit $\mathcal{V}(a)$ comme suit :*

$$(V \in \mathcal{V}(a)) \overset{(def)}{\Leftrightarrow} (\exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset V).$$

On peut vérifier aisément les exigences 1. à 3. (et surtout 3. !)

Exemple 1.4.1.2. *Soit $f_0 \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On définit $V \in \mathcal{V}(f_0)$ comme suit :*

$$(f \in V \in \mathcal{V}(f_0)) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ x_1, ..., x_p\ (p \geq 1) \text{ de } [a, b] \text{ tels que } \mid f(x_i) - f_0(x_i) \mid \leq \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, ..., p).$$

Ce qui est "libre" ici est $\varepsilon > 0$ et un nombre fini de points de $[a, b]$. Mais il n'y a pas moyen de trouver une distance d sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que :

$$(V \in \mathcal{V}(f_0)) \Leftrightarrow (\exists r > 0 \text{ tel que } \{f : d(f, f_0) \leq r\} \subset V).$$

1.4.2 Définition d'une topologie à partir d'une famille d'ouverts

On se donne une famille $\mathcal{O}$ de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{O}$;
2. Toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore dans $\mathcal{O}$;
3. Toute intersection d'un nombre fini d'éléments de E est encore dans $\mathcal{O}$.

Si on est capable de définir un famille $\mathcal{O}$ vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus, on dit (aussi) qu'on a défini une topologie (notée τ) sur E. La famille $\mathcal{O}$ s'appelle **la famille d'ouverts** (E, τ).
Ensuite on définit :
• la famille $\mathcal{V}(a)$ des voisinages de $a(\in E)$ en disant ceci :

$$(V \in \mathcal{V}(a)) \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{O} \text{ } tel \text{ } que \text{ } a \in U \subset V).$$

• les fermés de (E, τ) en disant : F est fermé si $F^c \in \mathcal{O}$, ou bien : F est fermé si pour tout $a \in F$ il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $F \cap V \neq \emptyset$.
Oui mais alors... si on fait le cheminement inverse (comme dans le paragraphe 1.4.1.), retombe-t-on sur nos pieds ? La réponse est oui (on s'en serait douté). C'est assez facile à démontrer, vous pouvez vous en assurer.

1.4.3 Synthèse

Deux voies pour définir une topologie τ sur E :
Partir de $\mathcal{V}(a)$, $a \in E$, puis définir des ouverts, des fermés, etc. comme dans 1.4.1.
Partir d'une famille d'ouverts $\mathcal{O}$, puis définir $\mathcal{V}(a)$, $a \in E$, comme dans 1.4.2.

Définir une topologie de manière si générale (et abstraite !) n'est pas un caprice de mathématicien voulant à tout prix généraliser, généraliser,... Il arrive - et il arrivera - que même sur des espaces préhilbertiens donnés (donc a priori avec une topologie définie), on soit conduit à considerer d'autres topologies, non "métrisables" (je n'ai pas dit "méprisables" !). En particulier la quête de topologies avec le moins d'ouverts possibles, les plus "économiques" en quelque sorte, tout en étant utiles pour les problèmes considérés, est un travail de conception mathématique trés fréquent.

Chapitre 2

Suite de points dans un espace métrique ; Espaces métriques complets, Espaces de Banach, Espaces de Hilbert ; Complété d'un espace métrique, d'un espace vectoriel normé, d'un espace préhilbertien.

"L'évidence empirique ne peut jamais établir l'existence mathématique et, de même, la richesse d'un résultat d'existence d'une solution, de la part d'un mathématicien, ne peut être considérée par un physicien comme une recherche superflue de rigueur. Seule la démonstration de l'existence peut donner la certitude que la description mathématique d'un phénomène physique est significative et correcte"

R. Courant

2.1 Suite de points dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique.

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1.1. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *(ou tend) vers* $u \in E$ *si la suite réelle* $(d(u_n, u))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0*, c'est-à-dire si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } d(u_n, u) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N_\varepsilon$$

(ou encore : $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ *tel que* $u_n \in B_f(u, \varepsilon)$ *pour tout* $n \geq N_\varepsilon$*).*
On écrit alors : $u_n \to u$ *ou* $\lim u_n = u$ *(sans préciser (tout le temps) que* $n \to +\infty$*).*

Théorème 2.1.1.2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* u *et vers* v*, alors nécessairement* $u = v$*. Autrement dit, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet au plus une limite (ouf!).*

C'est curieux qu'on sente le besoin d'énoncer un tel résultat, tellement il paraît naturel (influencés que nous sommes par ce que nous savons sur les suites réelles ou complexes). Pourtant le résultat n'est réputé vrai... que s'il est démontré, en utilisant les seules propriétés de d sur E.

Démonstration

Raisonnons par contradiction, supposons $u \neq v$. Soit $0 < \varepsilon < \dfrac{d(u, v)}{2}$ (choix possible puisque $d(u, v) > 0$, d'accord ?).
Il existe $N\varepsilon^{(1)}$ et $N\varepsilon^{(2)}$ tels que :

$$d(u_n, u) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N\varepsilon^{(1)},$$

$$d(u_n, v) \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N\varepsilon^{(2)}.$$

Ainsi, si $n \geq \max(N\varepsilon^{(1)}, N\varepsilon^{(2)})$,

$$d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \leq 2\varepsilon < d(u, v),$$

[grâce à l'inégalité triangulaire],
ce qui est impossible. Par conséquent $u = v$.

■

Exercice 2.1.1.3. *(important).*
- *Ecrire (correctement!) à l'aide de quantificateurs que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***ne converge pas vers un*** u ***donné.***
- *Ecrire (correctement!) à l'aide de quantificateurs que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

Exercice 2.1.1.4. *(très faciles car similaires à ceux faits en 1*^{er} *cycle avec les suites réelles).*
- *Montrer que toute suite convergente est bornée.*

- *Montrer que toute suite extraite (ou sous-suite) d'une suite convergente est convergente, et de même limite.*
- *Montrer que* $(u_n \to u$ *et* $v_n \to v) \Rightarrow (\lim d(u_n, v_n) = d(u, v))$.

Exercice 2.1.1.5. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n.*
Démontrer :
- $(u_n \to u$ *et* $v_n \to v) \Rightarrow (u_n + v_n \to u + v)$;
- $(u_n \to u$ *et* $\lambda_n \to \lambda) \Rightarrow (\lambda_n u_n \to \lambda u)$;
- $(u_n \to u) \Rightarrow (\|u_n\| \to \|u\|)$.
- *(Plus délicat)* $(u_n \to u) \Rightarrow (\overline{u}_n := \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} \to u)$.

Exercice 2.1.1.6. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Montrer :*
$(u_n$ *ne converge pas vers* $u) \Leftrightarrow (\limsup\limits_{n \to +\infty} d(u_n, u) > 0)$
[Voir Annexe pour les notions de $\limsup$ *et* $\liminf$ *d'une suite de réels].*

On a vu au Chapitre 1 (paragraphe 1.1.3) ce qu'était un point adhérent à $A \subset E$ et ce qu'était l'adhérence de A. Le résultat qui suit, **d'un usage constant**, dit tout cela **à l'aide de suites**.

Théorème 2.1.1.7.

1. $(u \in \overline{A}) \Leftrightarrow (\exists (u_n) \subset A$ *telle que* $\lim u_n = u)$;
2. $(A$ *est fermée*$) \Leftrightarrow ($*Toute suite convergente d'éléments de* A *a sa limite* **dans A**$)$.

Autrement dit : $\overline{A}$ *est l'ensemble des points (de E) accessibles (comme limites) par des suites convergentes de points de* A.

Démonstration

1. Soit $u \in \overline{A}$. Par définition, toute boule $B(u, r)$ $(r > 0)$ "coupe" A. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément dans $B(u, \frac{1}{n}) \cap A$, élément que nous notons u_n. alors, $(u_n) \to u$ et $\lim u_n = u$ (puisque $d(u_n, u) < \frac{1}{n}$).
   Réciproquement, soit $u \in E$ tel qu'il existe une suite $(u_n) \subset A$ de limite u. Soit $B(u, r)$ une boule avec $r > 0$ aussi petit que l'on veut. Il existe alors N tel que $u_n \in B(u, r)$ pour tout $n \geq N$; d'où $B(u, r) \cap A \neq \emptyset$.
2. Ici c'est juste "rephrasing" que $\overline{A} = A$.

   [⇐] Soit $u \in \overline{A}$; d'après 1., il existe $(u_n) \subset A$ de limite u. Par hypothèse $u \in A$. D'où $\overline{A} \subset A$, soit $\overline{A} = A$.

   [⇒] Supposons A fermé, soit $\overline{A} = A$. Soit $(u_n) \subset A$ de limite u. D'après 1. $u \in \overline{A}$, et comme $\overline{A} = A$, le tour est joué.

■

Exercice 2.1.1.8. *Soit* E *et* F *deux espaces métriques, et* $E \times F$ *structuré en espace métrique grâce à une des distances naturelles (cf. Chapitre 1 paragraphe 1.1.2.). Soit* $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $E \times F$. *Montrer :*
$(\lim (u_n, v_n) = (u, v)$ *dans* $E \times F) \Leftrightarrow (\lim u_n = u$ *dans* E *et* $\lim v_n = v$ *dans* $F)$.

Et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente (elle est alors dite divergente) ? On peut néanmoins analyser un peu mieux son comportement quand $n \to +\infty$ en examinant les sous-suites éventuellement convergentes.

Définition 2.1.1.9. *On appelle* ***valeur d'adhérence*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Evidemment, une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence, qui est sa limite. Attention ! une suite peut n'avoir aucune valeur d'adhérence (vous avez un exemple ?)

Exercice 2.1.1.10. *Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite réelle $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

C'est ici l'occasion de rappeler le résultat fondamental que voici (vu en 1^{er} cycle).

Théorème de BOLZANO et WEIERSTRASS [1]

Pour en savoir plus sur les valeurs d'adhérence d'une suite de réels, lire attentivement l'Annexe du présent chapitre.

Dans (l'espace euclidien) $\mathbb{R}^n$, de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

2.1.2 Suites de CAUCHY

Définition 2.1.2.1. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***une suite de CAUCHY*** *de (E, d) (ou vérifie* ***le critère de CAUCHY****) lorsque $d(x_n, x_m) \to 0$ quand m et $n \to +\infty$.*

Cela se traduit par :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que

$$(p \geq N_\varepsilon \text{ et } q \geq N_\varepsilon) \Rightarrow (d(u_p, u_q) \leq \varepsilon).$$

Ceci est une notion délicate ; passer un peu de temps à contempler et comprendre cette définition.

Exercice 2.1.2.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} d(u_{n+p}, u_n) = 0.$$

Est-elle de CAUCHY ? Hé hé...

1. Bernhard BOLZANO (1781-1848), mathématicien tchèque mais de langue et culture allemande. Karl WEIERSTRASS (1815-1897), mathématicien allemand que l'on considère comme le fondateur de l'Analyse moderne.
Le théorème évoqué fut énoncé par BOLZANO vers 1830 et démontré par WEIERSTRASS au début des années 1860.
Dans le Nord de l'Italie il y a une ville du nom de BOLZANO, il paraît qu'on en sort par la voie appelée la Weier... strasse.

Exemple 2.1.2.3. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ structuré en e.v.n. par la norme*

$$\|f\|_1 := \int_0^1 \mid f(t) \mid dt.$$

Soit la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ définie comme suit :

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nt + (1 - \frac{n}{2}) & si \;\; \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & si \;\; \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

[un petit dessin s.v.p. !]

- *Montrer que (f_n) est une suite de* Cauchy *de $(E, \|.\|_1)$.*
- *Montrer que (f_n) n'est pas convergente dans $(E, \|.\|_1)$, i.e. il n'existe pas de $\underline{f \in E}$ telle que que* $\lim \|f_n - f\|_1 = 0$.

Exercice 2.1.2.4. *Dans $l^2(\mathbb{R})$ normé par $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, on considère la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie comme suit :*
$e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ [1 à la n-ième position, 0 partout ailleurs].

- *Montrer que les e_n appartiennent au fermé borné $S(0,1)$ (c'est la sphère-unité de $l^2(\mathbb{R})$).*
- *Montrer qu'aucune suite extraite de (e_n) n'est convergente.*

Propriétés élémentaires 2.1.2.5.

1. *Si (u_n) est convergente, elle est de* Cauchy.
2. *Une suite de* Cauchy *est nécessairement bornée.*
3. *Si (u_n) est de* Cauchy, *toute suite extraite de (u_n) l'est aussi.*
4. ***Si** (u_n) **est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence** u**, alors** (u_n) **est convergente et de limite** u**.***

Les propriétés 1., 2., 3. sont vraiment élémentaires à démontrer, elles se démontrent comme dans le cas de suites réelles (il suffit de remplacer $\mid u_p - u_q \mid$ par $d(u_p, u_q)$). La démonstration de 4. demande un peu plus de réflexion ; en gros : $\varepsilon > 0$ étant donné, si $u_{n_k} \in B(u, \varepsilon)$ pour une infinité de (n_k), et qu'on peut rendre $d(u_p, u_q)$ aussi petit que voulu, on aura $d(u_n, u) \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Le problème est qu'en général une suite de Cauchy dans un espace métrique n'est pas convergente dans cet espace ! Ce qui motive la définition et la construction présentées dans les paragraphes ci-dessous.

2.2 Espaces métriques complets. Espaces de BANACH, Espaces de HILBERT

Définition 2.2.1. *Un espace métrique* (E, d) *est dit* ***complet*** *lorsque toute suite de* CAUCHY *d'éléments de* E *est convergente* <u>*dans* E</u> *(pas dans un machin plus gros que* E*).*
Un e.v.n. (réel ou complexe) $(E, \|.\|)$ *qui est complet pour la distance associée à* $\|.\|$ *(rappel :* $d(u, v) := \|u - v\|$*) est appelé un* ***espace de*** **BANACH**[2]
Un espace préhilbertien (réel ou complexe) $(E, <.,.>)$ *qui est complet pour la norme (et donc la distance) associée à* $<.,.>$ *(rappel :* $\|u\| = \sqrt{<u, u>}$*) est appelé un* ***espace de*** **HILBERT**[3]

Propriétés élémentaires 2.2.2.

1. *Si* (E, d) *est complet et si* δ *est une distance sur* E *équivalente à* d*,* (E, δ) *est aussi complet.*
2. *Si* E *et* F *sont isométriques (revoir si nécessaire la définition au paragraphe 1.1.1. du Chapitre 1),* E *et* F *sont simultanément complets ou non complets.*
3. *Si* E *et* F *sont complets, alors il en est de même de* $E \times F$ *structuré en espace métrique grâce à une des distances naturelles (cf. Chapitre 1, paragraphe 1.1.2.).*

Exemple 2.2.3. $(\mathbb{Q}, |\ .\ |)$ *n'est pas complet. La suite définie par :*
$u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ *pour tout* $n \geq 1$,
"vit" dans $\mathbb{Q}$*, est de* CAUCHY*, mais ne converge pas vers un élément de* $\mathbb{Q}$ *(mais vers quoi en fait ?).*

Exemple 2.2.4. $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ *muni d'une des normes de* HÖLDER *au choix est complet (donc un espace de* BANACH*).*
$\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire usuel* $<.,.>$ *est complet, donc un espace de* HILBERT.

Exemple 2.2.5. $E = [0, 1[$ *muni de la distance usuelle* $(d(u, v) =| u - v |)$ *n'est pas complet. Que manque t-il pour qu'il le soit ? Proposer un* $\widetilde{E}$*, contenant* E*, mais le plus petit possible (au sens de l'inclusion) et qui soit complet.*

Exercice 2.2.6. $E =]0, +\infty[$ *muni de la distance usuelle n'est pas complet. L'est-il pour la distance* $\delta(u, v) =| \ln(\frac{u}{v}) |$ *? (Rép. Oui).*

Exemple 2.2.7. *Quelques grands classiques (cf. paragraphe 1.2.3. du Chapitre 1).*

1. $(\mathcal{B}(E, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de* BANACH.

---

2. Stephan BANACH (1892-1945), mathématicien polonais, l'un des pères de l'Analyse fonctionnelle.BANACH travaillait surtout dans un bar (comme quoi tous les espoirs vous sont permis !), en écrivant parfois sur la nappe... que ses disciples s'empressaient de récupérer ensuite.

3. David HILBERT (1862-1943), mathématicien allemand qui a produit une œuvre considérable ; il s'intéressait à tous les domaines des mathématiques, tant théoriques qu'appliquées. HILBERT généralise au début du siècle la notion de produit scalaire à des espaces de suites ; ce n'est que vers 1930 que fut proposée l'axiomatisation des espaces dénommés "de HILBERT".
Il y a quelques années, une étudiante allemande dénommée HILBERT s'est présentée pour s'inscrire en mathématiques à l'université Paul Sabatier. La première question que l'Administration lui posa fut : "Hilbert, votre dossier est-il... complet ?"

2. *$(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$ est un espace de* BANACH *(sous-espace de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$).*
3. *$c_0(\mathbb{K})$, $c(\mathbb{K})$, $l^\infty(\mathbb{K})$ munis de la norme $\|.\|_\infty$ sont des espaces de* BANACH.
4. *$(l^p(\mathbb{K}),\|.\|_p)$ est un espace de* BANACH.
5. *Soit $E := \{f \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim\limits_{|t|\to+\infty} \mid f(t) \mid = 0\}$. Alors $(E,\|.\|_\infty)$ est un espace de* BANACH.
6. *$(l^2(\mathbb{K}),<.,.>)$ est un espace de* HILBERT.
7. *$(\mathcal{C}([a,b]),<.,.>)$ n'est pas complet, ce n'est donc pas un espace de* HILBERT.
8. *$(\mathcal{C}^1([a,b]),<.,.>_1)$ n'est pas complet, ce n'est donc pas un espace de* HILBERT.

Il est toujours intéressant de savoir que (E,d) est complet : en effet, si tel est le cas, on peut démontrer qu'une suite est convergente sans connaître (ou subodorer) la limite d'avance ; il suffit (si l'on peut dire !) de démontrer que la suite est de CAUCHY ; il reste ensuite à en déterminer la limite, ce qui n'est pas toujours nécessaire ou demandé.
Et si (E,d) n'est pas complet (ce qui est le cas de beaucoup d'espaces fonctionnels) ? Eh bien "on complète"...

2.3 Complété d'un espace métrique, d'un e.v.n., d'un espace préhilbertien

L'idée de "compléter" (E, d) pour en déduire un espace métrique complet $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ "plus gros, mais pas trop" est d'enrichir E d'éléments nouveaux et de prolonger la définition de d de sorte que :
Il existe une application $i : E \to \widetilde{E}$ vérifiant

1. i est une isométrie de (E, d) dans $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$;
2. l'adhérence de $i(E)$ dans $\widetilde{E}$ est $\widetilde{E}$ tout entier (on dit que $i(E)$ est partout dense dans $\widetilde{E}$).

Théorème 2.3.1. *On peut associer à tout espace métrique (E, d)* ***un complété*** *$(\widetilde{E}, \widetilde{d})$. Ce complété est* ***unique à une isométrie près****, c'est-à-dire : si $(\widetilde{E}_1, \widetilde{d}_1)$ et $(\widetilde{E}_2, \widetilde{d}_2)$ sont deux complétés de (E, d), alors $(\widetilde{E}_1, \widetilde{d}_1)$ et $(\widetilde{E}_2, \widetilde{d}_2)$ sont isométriques.*

Ce théorème n'est pas démontré ici. La construction effective de $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ à partir de (E, d) peut être compliquée et abstraite ; une des manières de faire est comme pour passer de $(\mathbb{Q}, |\,.\,|)$ à $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ [pour celles et ceux qui ont pu voir cette construction].
La possibilité de compléter (E, d) est satisfaisant du point de vue théorique, mais les objets obtenus dans $\widetilde{E}$ sont beaucoup moins "palpables" que les objets "simples" de l'espace de départ E.

Quelques commentaires à propos de 1. et 2. au-dessus :

(a) On n'a pas "perdu" en passant de E à $\widetilde{E}$, puisque E "s'identifie" à une partie de $\widetilde{E}$.

(b) Tant qu'on est dans E (dans $i(E)$ si on veut être tout à fait rigoureux), $\widetilde{d}$ n'est autre que d.

(c) Même si l'objet $\widetilde{u} \in \widetilde{E} \setminus E$ est exotique et pas "palpable", il est limite d'une suite d'éléments u_n de E, donc plus accessibles.

Naturellement, si (E, d) est déjà complet, inutile d'aller le compléter, en d'autres termes on garde (E, d) pour $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$.
Dans les mathématiques appliquées aux Sciences de l'ingénieur, on est amené à construire de nouveaux espaces fonctionnels pour "bien poser" les problèmes, c'est-à-dire être sûr de l'existence (et, si possible de l'unicité) des solutions ; ceci est particulièrement vrai dans les problèmes variationnels ou d'équations aux dérivées partielles. La construction "explicite" de $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ à partir de (E, d), c'est-à-dire une réalisation "concrète" de $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$, n'est pas chose facile en général.

Complété d'un e.v.n.

Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n., il est aussi métrique grâce à la distance associée (rappel : $d(u,v) = \|u - v\|$). Qu'advient-il si on complète (E, d) ? Certes un espace métrique $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$, mais la particularité (attendue, il est vrai) est que $\widetilde{E}$ est structuré en espace vectoriel et que $\widetilde{d}$ dérive d'une norme $\|.\|^\sim$.

Théorème 2.3.2. *Soit $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ l'espace métrique complété de $(E, \|.\|)$. Il existe alors sur $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ une structure unique d'espace vectoriel et une norme $\|.\|^\sim$ telle que :*

1. *$(E, \|.\|)$ est linéairement isométrique à un sous-espace vectoriel partout dense de l'espace de* Banach *$(\widetilde{E}, \|.\|^\sim)$*
2. *$\widetilde{d}$ dérive de la norme $\|.\|^\sim$.*

$(\widetilde{E}, \|.\|^\sim)$ est appelé l'espace de Banach *complété de l'e.v.n. $(E, \|.\|)$.*

Le point 1. du Théorème 2.3.2 peut être traduit en : il existe $i : E \to \widetilde{E}$ linéaire, bijective de E sur $i(E)$, avec :

$$\begin{cases} \|i(u)\|^\sim = \|u\| \quad \textit{pour tout} \quad u \in E, \\ \overline{i(E)} = \widetilde{E}. \end{cases}$$

Exemple 2.3.3. *$(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_p)$ n'est pas complet. La théorie de la Mesure et de l'Intégration lui fournit un complété concret qui est l'espace (dit) de* Lebesgue[4] *$L^p([a,b])$. Chaque f de $\mathcal{C}([a,b])$ est identifié à un élément de $L^p([a,b])$, à savoir la classe des fonctions qui ne diffèrent de f que sur un ensemble de mesure nulle.*

En fait, historiquement, l'intégration à la Lebesgue n'a pas été confectionnée pour compléter des espaces non complets comme $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_p)$, mais il s'est avéré que "représenter" le complété de $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_p)$ revenait à faire de l'intégration à la Lebesgue de fonctions sur $[a,b]$ (ce qui constitue un argument en faveur de ce type d'intégration plutôt qu'un autre).

Complété d'un espace préhilbertien

Théorème 2.3.4. *Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien réel et $(\widetilde{E}, \|.\|^\sim)$ le complété de l'e.v.n. $(E, \|.\| = \sqrt{<.,.>})$. Il existe alors une structure unique d'espace préhilbertien réel sur $(\widetilde{E}, \|.\|^\sim)$ (i.e. un produit scalaire $<.,.>^\sim$ sur $\widetilde{E}$) telle que :*

1. *$(E, <.,.>)$ est linéairement isométrique à un sous-espace vectoriel partout dense de l'espace de* Hilbert *$(\widetilde{E}, \|.\|^\sim)$.*
2. *$\|.\|^\sim$ est $\sqrt{\|.\|^\sim}$.*

$(\widetilde{E}, <.,.>^\sim)$ est appelé l'espace de Hilbert *complété de $(E, <.,.>)$.*

4. Henri Lebesgue (1875-1941), mathématicien français à qui on doit une fameuse théorie de la Mesure et de l'Intégration.

Exemple 2.3.5. *$\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$< f, g >_1 := \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f'(t)g'(t)dt$$

est un espace préhilbertien réel non complet. Une "réalisation concrète" du HILBERT *complété de cet espace est ce qu'on appelle l'espace de* SOBOLEV[5] *$H^1([a,b])$, en gros l'espace des fonctions $f \in L^2([a,b])$ dont la "dérivée généralisée" f' (non définie ici) est aussi de carré intégrable. Le produit scalaire dans $H^1([a,b])$ a alors la même allure que $< .,. >_1$.*

Exercice 2.3.6. *On désigne par $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais qui sont nulles en dehors d'un borné, et par $L^p([a,b])$ l'espace de* LEBESGUE *des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable.*
Lire (et méditer sur) le tableau "de complétion" suivant.

Espace	*Produit scalaire ou norme*	*Espace complété*
$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$	$< f, g > = \int_a^b f(t)g(t)dt$	$L^2([a,b])$
$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$	$\|.\|_p,\ p \geq 1$	$L^p([a,b])$
$\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$	$\|.\|_1$	$L^1(\mathbb{R})$
$\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$	$\|.\|_2$	$L^2(\mathbb{R})$
$\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$	$\|.\|_\infty$	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* $\lim_{\lvert t\rvert \to +\infty} f(t) = 0\}$

Exercice : Convexité de la fonction distance.

Soit A une partie fermée non vide d'un e.v.n. $(E, \|.\|.)$.
À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur A la fonction distance d_A est-elle convexe ?

Exercice : Convergence forte vs. convergence faible.

Dans un espace préhilbertien réel $(H, < .,. >)$ on dit que la suite (u_n) **converge faiblement** vers u (et on écrit $u_n \rightharpoonup u$) lorsque :

$$\forall v \in H, < u_n, v > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < u, v > .$$

La convergence usuelle de (u_n) vers u (*i.e.* celle définie à partir de la norme (donc de la distance) associée à $< .,. >$) est appelée **convergence forte**.
- Montrer : $(u_n \to u) \Rightarrow (u_n \rightharpoonup u)$.
- (Résultat facile et intéressant) Montrer : $(u_n \to u) \Leftrightarrow (u_n \rightharpoonup u$ et $\|u_n\| \to \|u\|)$.

5. Serguei SOBOLEV (1908-1989), mathématicien russe dont les travaux ont porté sur les équations différentielles et aux dérivées partielles (e.d.p.), domaine dans lequel on lui doit de nouvelles méthodes de résolution. Les "espaces de SOBOLEV" interviennent dans la résolution de problèmes variationnels et d'e.d.p..

Exercice : Distance de Hausdorff [6]

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fermés bornés non vides de $\mathbb{R}^n$. Etant donné K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$ on pose :

$$e(K_1, K_2) := \sup\{d_{K_2}(x) : x \in K_1\} \ ;$$
$$\Delta_H(K_1, K_2) := \max\{e(K_1, K_2), e(K_2, K_1)\}.$$

1. Visualiser les définitions de $e(K_1, K_2)$ et $\Delta_H(K_1, K_2)$ en illustrant ce que signifie $e(K_1, K_2) \leq \varepsilon$ et $\Delta_H(K_1, K_2) \leq \varepsilon$.
2. • Démontrer que Δ_H définit une distance sur $\mathcal{K}$.
   • Montrer : $\Delta_H(K_1, K_2) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \mid d_{K_1}(x) - d_{K_2}(x) \mid$.
3. $(\mathcal{K}, \Delta_H)$ est-il complet ?

Exercice (Intéressant, important, pas difficile)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de l'espace métrique complet (E, d). On suppose :

1. $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $diam(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démontrer qu'alors $\bigcap\limits_n F_n$ est réduit à un point et un seul.

Exercice : Distance d'Ekeland [7]

[A faire lorsqu'on en saura un peu plus sur la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$].
Dans $E := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on définit :

$$d_E(f, g) := \text{mesure de Lebesgue de } \{t \in [0, 1] : f(t) \neq g(t)\}.$$

- Montrer que d_E définit une distance sur E.
  d_E vient-elle d'une norme sur l'e.v. E ?
- (E, d_E) est-il complet ?

Exercice

Soit $E := \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\nu : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\nu(f) :=\mid f(a) \mid + \int_a^b \mid f(t) \mid dt.$$

- Montrer que ν définit une norme sur E (ce qui ne plaît pas trop aux étudiant-e-s...) et que cette norme n'est pas équivalente à $\|.\|_1$.
- Vérifier que (E, ν) n'est pas de Banach.
- Quel serait une réalisation du complété de (E, ν) ?

6. Felix Hausdorff (1868-1942), mathématicien allemand connu comme l'un des fondateurs de la Topologie générale. Ce que l'on sait moins, c'est qu'il se suicida avec sa femme et sa soeur pour échapper à l'internement par les Nazis.

7. Ivar Ekeland (1944-.), mathématicien français, professeur à l'Université de Paris IX-Dauphine. Ekeland a utilisé d_E dans la démonstration de théorèmes relatifs à la Commande optimale.

Annexe

Tout ce que vous voudriez savoir sur $\liminf$ et $\limsup$ et que vous n'osez demander...

Ceci est aussi utile dans le contexte du Cours sur la Mesure et l'Intégration.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (car on va comparer des valeurs !)
Soit $\beta_n := \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\}$ (sup de la "queue de la suite").
On a $\beta_{n+1} \leq \beta_n$ (d'accord ?), ce qui fait que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite β mais dans $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle **limite supérieure** de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\limsup\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ (ou encore $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \alpha_n$) la limite de (β_n) quand $n \to +\infty$.
En bref (tout ça dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$\begin{aligned}\underbrace{\limsup \alpha_n}_{\beta} &:= \lim_{n\to+\infty}(\sup\{\alpha_{n+p} : p \in \mathbb{N}\}) \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup\{\alpha_{n+p} : p \in \mathbb{N}\}).\end{aligned}$$

Propriété fondamentale

De la suite $(\alpha_n)_n$ on peut extraire une suite $(\alpha_{n_k})_k$ dont la limite est β, mais on ne peut pas en extraire une dont la limite serait $> \beta$.

β est donc "la plus grande limite possible de sous-suites de (α_n)"

Question : quand est-ce qu'une suite (α_n) est majorée ?
Réponse : exactement quand $\limsup \alpha_n < +\infty$.

On définit d'une manière similaire la notion de **limite inférieure** de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\gamma_n := \inf\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\}$ (inf de la "queue de la suite").
On a $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$ (d'accord ?), ce qui fait que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite γ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle **limite inférieure** de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\liminf\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ (ou encore $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \alpha_n$) la limite de (γ_n) quand $n \to +\infty$.
De fait (dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$\begin{aligned}\underbrace{\liminf \alpha_n}_{\gamma} &:= \lim_{n\to+\infty}(\inf\{\alpha_{n+p} : p \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf\{\alpha_{n+p} : p \in \mathbb{N}\}).\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile à voir que

$$\left.\begin{array}{rcr} \liminf \alpha_n & = & -\limsup(-\alpha_n) \\ \liminf \alpha_n & \leq & \limsup \alpha_n \end{array}\right\} (dans\ \overline{\mathbb{R}})$$

Propriété fondamentale

De la suite $(\alpha_n)_n$ on peut extraire une suite $(\alpha_{n_k})_k$ dont la limite est γ, mais on ne peut pas en extraire une dont la limite serait $< \gamma$.

γ est donc "la plus petite limite possible de sous-suites de (α_n)"

Question : quand est-ce qu'une suite (α_n) est minorée (*resp.* bornée) ?
Réponse : exactement quand $\liminf \alpha_n > -\infty$ (*resp.* quand $\liminf \alpha_n$ et $\limsup \alpha_n$ sont toutes deux finies).

Bien noter que, contrairement à la notion de limite, les notions de limite supérieure et de limite inférieure sont <u>toujours définies</u>. Un réflexe à avoir :

$$(\alpha_n \leq M \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}) \overset{?}{\Rightarrow} (\lim \alpha_n \leq M)$$

<u>NON</u> ! si on ne sait pas au préalable que (α_n) a une limite.
<u>MAIS</u> : $(\alpha_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\limsup \alpha_n \leq M)$. Implication toujours vraie.

Evidemment on s'attend au résultat suivant :

Proposition

$((\alpha_n)_n$ converge vers $\alpha) \Leftrightarrow (\liminf \alpha_n = \limsup \alpha_n = \alpha)$.

<u>Et si la suite (α_n) n'est pas convergente mais seulement bornée ?</u>
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (α_n) est un fermé borné de $\mathbb{R}$, contenu dans $[\liminf \alpha_n, \limsup \alpha_n]$ et contenant les deux extrémités de ce segment.
Il se peut même que cet ensemble de valeurs d'adhérence de (α_n) soit
$[\liminf \alpha_n, \limsup \alpha_n]$ tout entier.

Exercice (Résultat utile dans l'étude de la convergence de certaines méthodes itératives).

Soit (α_n) une suite bornée de réels telle que $\alpha_{n+1} - \alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\alpha_n)_n$ est exactement le segment $[\liminf \alpha_n, \limsup \alpha_n]$.
- Supposons que l'on sache que
  $\{$valeurs d'adhérence de $(\alpha_n)_n\} \subset \{a_1, ..., a_p\}$ (ensemble discret).
  Vérifier qu'alors toute la suite (α_n) converge, et que sa limite est l'un des a_i.

Les règles de calculs sur lim inf et lim sup sont évidemment moins simples que celles sur les limites. Elles résultent néanmoins des définitions mêmes. A titre d'exemples :

- $\liminf \alpha_n + \liminf \beta_n \leq \liminf(\alpha_n + \beta_n) \leq \liminf \alpha_n + \limsup \beta_n$ (à condition que les sommes soient bien définies, *i.e.* qu'on évite $+\infty + (-\infty)$).
- (un cas où "ça passe à travers").
  Si (β_n) converge vers β,
  $\liminf \alpha_n + \beta = \liminf(\alpha_n + \beta_n)$,
  $\liminf(\alpha_n + \beta_n) = \limsup \alpha_n + \beta$.

Un peu de pratique et vous verrez que ces notions et le calcul qui va avec ne sont pas difficiles et qu'elles s'avèrent très utiles.

Chapitre 3

Fermés d'un espace métrique, Densité, Séparabilité ; Ouverts d'un espace métrique ; Compléments sur les parties complètes d'un espace métrique ; Parties compactes d'un espace métrique

"L'incroyable utilité des mathématiques dans les sciences de la nature touche au mystère ; on en connaît aucune explication rationnelle."

E.Wigner

"Qui respecte la Nature fait des mathématiques."

J.-L.Lions

3.1 Fermés d'un espace métrique. Densité. Séparabilité

On a vu au Chapitre 1 paragraphe 1.3, ce que signifiait :
• "u est adhérent à A", "u est intérieur à A" ;
• $\overline{A}$ est l'adhérence de A, $\overset{\circ}{A}$ (ou $intA$) est l'intérieur de A.
Nous allons dans ces paragraphes travailler un peu plus avec ces notions. Les propriétés qui suivent sont vraiment faciles à démontrer : il suffit d'utiliser les définitions.

On est toujours dans le contexte d'un espace métrique (E, d).

Proposition 3.1.0.6.

1. $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$.
2. $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_m}$,

   mais
3. $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$, *sans qu'on ait nécessairement égalité lorsque I est infini.*
4. $\overline{(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m)} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_m}$, *sans qu'on ait nécessairement égalité.*

Il faut que le lecteur-étudiant se construise tout de suite des exemples montrant que les inclusions 3. et 4. peuvent être strictes
(**Ind.** Pas la peine d'aller chercher des exemples compliqués, une recherche dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ suffit).
Rappelons que $\overline{A}$ est toujours "plus gros" que A (*i.e.* $A \subset \overline{A}$), parfois nettement plus gros.

Définition 3.1.0.7. *A est dite **fermée** (dans (E, d)) (ou encore "est **un fermé** de (E, d)") lorsque $A = \overline{A}$.*

Autrement dit, A est fermée lorsqu'elle coïncide avec sa fermeture, ces définitions sont bien cohérentes !
Naturellement, "dans (E, d)" est là pour préciser avec quelle distance on travaille ; A peut être fermée dans (E, d_1) et ne pas l'être dans (E, d_2), *cf.* Exercice 3.1.2.7. ci-dessous.

Théorème 3.1.0.8. *(fondamental)*

1. *Toute **réunion finie** de parties fermées de E est fermée.*
2. ***Toute intersection** de parties fermées de E est fermée.*

L'assertion 1. du Théorème au-dessus vient immédiatement de 2. de la Proposition 3.1.0.6. (et de la Définition 3.1.0.7.), tandis que l'assertion 2. du même théorème résulte de $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

3.1.1 Fermeture relative, fermé relatif

Soit $F \subset (E, d)$, et sur F on considère la restriction de la distance d (que l'on note de la même façon) ; on a ainsi affaire à un nouvel espace métrique (F, d). Questions : Fermer A $(\subset F)$ dans (F, d) et fermer A dans (E, d) sont-ils synonymes ? L'adhérence de A dans (F, d) a-t-il un lien avec l'adhérence de A dans (E, d) ? les réponses se trouvent être fort simples.

Théorème 3.1.1.1. *L'adhérence de A $(\subset F)$ dans (F, d) est exactement l'adhérence de A dans (E, d) intersectée avec F.*
Ainsi, A $(\subset F)$ est fermée dans (F, d) si, et seulement si, A est de la forme $B \cap F$ où B est fermé dans (E, d).

Démonstration

- D'après ce qui a été vu au Chapitre 2, paragraphe 2.1.,
  - l'adhérence de A dans (F, d) est l'ensemble des limites de suites convergentes $(x_n) \subset A$ qui se trouvent dans F ;
  - $\overline{A} \cap F$ est l'intersection avec F de l'ensemble des limites de suites convergentes $(x_n) \subset A$.

  D'où le premier résultat annoncé.
- Soit A fermée dans (F, d) : $A = \overline{A}^F$ (*i.e.* A est égale à son adhérence dans (F, d)), mais $\overline{A}^F = \overline{A} \cap F$ (démontré au 1^{er} point) ; d'où $A = \overline{A} \cap F$, c'est-à-dire $A = B \cap F$, où B est la partie fermée $\overline{A}$.
  Réciproquement, si $A = B \cap F$ avec B fermée dans (E, d), alors $A \subset B$, d'où $\overline{A} \subset B$, de sorte que $\overline{A} \cap F \subset B \cap F$; ainsi $\overline{A}^F$ $(= \overline{A} \cap F) \subset B \cap F$ $(= A)$, ce qu'il fallait démontrer.

■

Conséquence : Lorsque F est fermée dans (E, d), il n'y a pas de différence entre "être fermée dans (F, d)" (notion relative à F) et "être fermée dans (E, d)" (fermeture dans l'espace ambiant E).

3.1.2 Densité et approximation dans (E, d)

Définition 3.1.2.1. *Soit A et B deux parties de E. On dit que A est* ***dense*** *dans B lorsque $B \subset \overline{A}$.*
En particulier (cas particulier où $B = E$), on dit que A est ***(partout) dense*** *dans E lorsque $\overline{A} = E$.*

Cette situation est fréquente en Analyse : on ne sait pas travailler sur des objets mathématiques (par exemple des fonctions) compliqués (ceux de B), mais ces objets sont "aussi près que l'on veut" d'objets simples (ceux de A) ; cela facilite la vie et on peut espérer que des propriétés vraies pour les objets de A "passent" à ceux de B. Si $u \in B$ et que A est dense dans B, il existe une suite $(u_n) \subset A$ qui converge vers u, et pourvu que la propriété considérée, vraie en tout $u_n \in A$, "passe à la limite", elle sera aussi vraie en u ($\in B$). On reverra cette manière de faire au chapitre suivant, une fois qu'on aura exposé la notion de continuité d'applications.

Définition 3.1.2.2. (E, d) *est dit* ***séparable*** *(ou* ***de type dénombrable****) s'il existe une partie dénombrable* $\{u_k : k \in \mathbb{N}\} \subset E$ *partout dense dans* E*. Autrement dit si :*

$$\overline{\{u_0, u_1 ..., u_k, ...\}} = E.$$

La plupart des espaces de travail (E, d) que nous rencontrerons sont séparables, mais il en existe qui ne le sont pas ! (sinon on n'aurait pas proposé de définition...). Par exemple, l^p est séparable pour $1 \leq p < +\infty$, mais l^∞ n'est pas séparable (curieux, non ?).

Exemple 3.1.2.3. *(vu en 1^er^ cycle, chapitre sur l'intégration de* RIEMANN*)*
Soit $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble des* ***fonctions en escalier*** *sur* $[a, b]$*. Alors* $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ *est partout dense dans* $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*. Conséquence :* $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *est séparable (pourquoi donc ?).*

Exemple 3.1.2.4. *(*K.WEIERSTRASS*, forme polynomiale)*
Soit $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions polynomiales sur* $[a, b]$ *(sans restriction sur le degré !). Alors* $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$ *est partout dense dans* $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*.*

Exemple 3.1.2.5. *(*K.WEIERSTRASS*, forme trigonométrique)*
Soit $\mathcal{T}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de la forme suivante :*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{d} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

où $d \in \mathbb{N}^*$, a_k *et* b_k *sont réels (on appelle parfois ces fonctions les "fonctions polynomiales trigonométriques"). Soit* $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *et* 2π*-périodiques, normé par* $\|.\|_\infty$*.*
Alors $\mathcal{T}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est dense dans* $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*.*

Exercice 3.1.2.6. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n. (réel ou complexe), soit* V *un sous-espace vectoriel de* E*. Montrer que* $\overline{V}$ *est aussi un sous-espace vectoriel de* E*.*
(On a fréquemment la situation où un sous-espace vectoriel V *de* E *est partout dense dans* E*, cf. les exemples supra).*

Exercice 3.1.2.7. *(Intéressant).*
Considérons $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *normé par* $\|.\|_\infty$ *ou par* $\|.\|_1$*. On pose*

$$V := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 0\}.$$

- *Montrer que* V *est fermé dans* $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*.*
- *Montrer que* V *est partout dense dans* $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$*.*

Exercice 3.1.2.8. *(Intéressant).*
Soit H *un hyperplan de l'e.v.n.* $(E, \|.\|)$*. [Un hyperplan* H *est un s.e.v. de* E *tel que*

$$\left.\begin{pmatrix} F \text{ s.e.v. de } E \\ \text{et} \\ H \subset F \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F = H \\ \text{ou} \\ F = E \end{pmatrix}\right].$$

- *Démontrer qu'un hyperplan H de E est soit fermé ($\overline{H} = H$), soit partout dense dans E ($\overline{H} = E$)*
- *A la lumière de ce résultat général, revoir l'Exercice 3.1.2.7.*

Exercice 3.1.2.9. *(Quasi-trivial).*
Soit $A \subset (E, d)$. Vérifier que A est fermé si, et seulement si, A contient $fr\ A$ (la frontière de A).

3.2 Ouverts d'un espace métrique

Ce (court) paragraphe est d'un parallèle saisissant avec le paragraphe 3.1..

Proposition 3.2.0.10.

1. *$(A \subset B) \Rightarrow (\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B})$.*
2. *$\overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m}} = \overset{\circ}{A}_1 \cap \overset{\circ}{A}_2 \cap ... \cap \overset{\circ}{A}_m$,*
   mais
3. *$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A}_i$, sans qu'on ait nécessairement égalité lorsque I est infini.*
4. *$\overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m}} \supset \overset{\circ}{A}_1 \cup \overset{\circ}{A}_2 \cup ... \cup \overset{\circ}{A}_m$, sans qu'on ait nécessairement égalité.*

$\overset{\circ}{A}$ est, rappelons-le, toujours "plus petit" que A (*i.e.* $\overset{\circ}{A} \subset A$), parfois nettement plus petit (puisqu'on peut même avoir $\overset{\circ}{A} = \emptyset$).

Définition 3.2.0.11. *A est dite **ouverte** (dans (E, d)) (ou encore "**est un ouvert** de (E, d)") lorsque $\overset{\circ}{A} = A$.*

A est donc ouverte lorsqu'elle coïncide avec son intérieur qui, lui, est toujours ouvert.

Théorème 3.2.0.12. *(fondamental).*

1. ***Toute intersection finie** de parties ouvertes de E est ouverte.*
2. ***Toute réunion** de parties ouvertes de E est ouverte.*

Le 1. du Théorème 3.2.0.12 vient immédiatement du 2. de la Proposition 3.2.0.10. (et de la Définition 3.2.0.11.), tandis que le 2. du Théorème 3.2.0.12. résulte de $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}} \supset \bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A}_i$.
Entre les notions d'intérieur et de fermeture, on a un "jeu de bascule" qui s'appuie sur le passage au complémentaire. Rappelons à cet égard que $A^{cc}(:= (A^c)^c)= A$ (on retombe sur nos pieds !).

Proposition 3.2.0.13. ***"Le jeu de bascule"***

1. *$\overset{\circ}{A^c} = (\overline{A})^c$, $\overline{(A^c)} = (\overset{\circ}{A})^c$*
2. *(Chapitre 1, page 8, "revisited") : A est fermée si et seulement si A^c est ouverte ; A est ouverte si et seulement si A^c est fermée.*

Ce jeu de bascule est très facile à retenir et à utiliser, il doit être "mécanique" même : échange de $\overline{(.)}$ et $\overset{\circ}{(.)}$ quand on passe de A à A^c. Il explique aussi le parallèle entre les Théorèmes 3.1.0.8. du paragraphe 3.1. et 3.2.0.10. du paragraphe 3.2. (se rappelant tout de même que $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ et que $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$). Il suffit donc de retenir qu'un seul résultat pour retenir tous les autres. Voici une stratégie de mémorisation (qui a fait ses preuves) ; on retient l'exemple que voici.

Exemple 3.2.0.14. *Soit $\mathcal{O}_i, i \in \mathbb{N}^*$ l'ouvert de $\mathbb{R}$ défini comme ceci :*

$$\mathcal{O}_i := \{x \in \mathbb{R} : x < 1 + \frac{1}{i}\}.$$

Alors - et c'est facile à voir -
$\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_i =]-\infty, 1]$ *qui est un fermé.*

Comme "quand ce n'est pas l'un, c'est l'autre", on se remémore :
- c'est une **intersection** finie de parties ouvertes, qui est ouverte ("et donc" une **intersection** quelconque de parties fermées qui est fermée).
- c'est une **réunion** quelconque de parties ouvertes qui est ouverte ("et donc" une **réunion** finie de parties fermées qui est fermée).

Démonstration de la Proposition 3.2.0.13.

Il suffit de démontrer l'une des formules du 1. (d'accord ?), la première par exemple.
Que signifie $u \in (\overset{\circ}{A^c})$? Réponse : il existe $r > 0$ tel que $B(u,r) \subset A^c$.
Que signifie $u \in (\overline{A})^c$? Réponse : $u \notin \overline{A}$, donc c'est le contraire de "$u \in \overline{A}$" qui a lieu, *i.e.*

$$non(\forall r > 0, B(u,r) \cap A \neq \emptyset),$$

soit $(\exists r > 0, B(u,r) \cap A = \emptyset)$ ce qui revient au même que de dire $(\exists r > 0, B(u,r) \subset A^c)$.

■

Exercice 3.2.0.15. *(à rapprocher de l'Exercice 3.1.2.8. de la p.38)*
Soit V un sous-espace vectoriel de l'e.v.n. $(E, \|.\|)$. Alors :
- $\overset{\circ}{V} = E$ *lorsque* $V = E$ *;*
- $\overset{\circ}{V} = \emptyset$ *dès lors que V est strictement inclus dans E.*

Le résultat est intuitif mais sa démonstration est nécessaire (et mérite d'être faite).

Exercice 3.2.0.16. *(très facile).*
On rappelle que $frA := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Montrer que $fr(A^c) = frA$.

Exercice 3.2.0.17. *On appelle (parfois)* ***extérieur de*** *A l'interieur de A^c, on note ça $extA$. Montrer :*

$$E = (intA) \cup (frA) \cup (extA),$$

et que les trois parties en question sont disjointes deux à deux (on est à l'intérieur de A, sur la frontière de A, ou à l'extérieur de A, pas le choix pardi !).

Exercice 3.2.0.18. *(facile).*
Démontrer que l'on a toujours $fr(A \cup B) \subset (frA) \cup (frB)$, mais que l'inclusion inverse est fausse en général.
Montrer que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, alors $fr(A \cup B) = (frA) \cup (frB)$.

Exercice 3.2.0.19. *Donner des exemples de parties $A \subset \mathbb{R}$ avec*
- *$frA = \emptyset$ (il n'y en a pas beaucoup !) ;*
- *$frA = \mathbb{R}$.*

3.2.1 Ouverture relative, ouvert relatif

Soit $F \subset (E, d)$, on considère le sous-espace métrique (F, d).

Théorème 3.2.1.1. *L'intérieur de $A(\subset F)$ dans (F, d) est exactement l'intérieur de A dans (E, d) intersecté avec F.*
Ainsi, $A(\subset F)$ est ouverte dans (F, d) si, et seulement si, A est de la forme $O \cap F$ où O est ouverte dans (E, d).

Ceci se démontre (facilement), soit en revenant aux définitions originelles de "l'intérieur", soit en se servant du Théorème 3.1.1.1. du paragraphe 3.1.1. et du "jeu de bascule" (Proposition 3.2.0.13.).

Conséquence

Lorsque F est ouverte dans (E, d), il n'y a pas de différence entre "être ouverte dans (F, d)" (notion relative à F) et "être ouverte dans (E, d)" (prise d'intérieur dans l'espace ambiant E).

Exercice 3.2.1.2. *(résultat facile, mais qui peut paraître curieux au premier abord).*
Montrer que tout fermé est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts, et que tout ouvert est la réunion d'une famille dénombrable de fermés.

3.3 Compléments sur les parties complètes d'un espace métrique

La définition qui suit n'est pas véritablement une nouveauté.

Définition 3.3.0.3. *Une partie F d'un espace métrique (E, d) est dite* **complète** *si (F, d) est un espace métrique complet.*

Mais pour démontrer que F est une partie complète, faut-il chaque fois revenir à la définition (avec les suites de Cauchy) ?
Fort heureusement non. Voici quelques propriétés dans ce sens ("Fermé" vs "Complet").

Théorème 3.3.0.4. *Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors toute partie fermée de E est complète.*

In short,
"Un fermé dans un complet est complet".

Démonstration

Soit $(u_n) \subset F$ une suite de Cauchy. Puisque (E, d) est complet, il existe $u \in E$ tel que $u_n \to u$. Mais puisque F est fermée, la limite d'une suite convergente d'éléments de F est encore dans F. Donc, ici, $u \in F$, et le résultat annoncé s'ensuit.

■

Théorème 3.3.0.5. *Soit F une partie complète d'un espace métrique (quelconque). Alors F est fermée.*

En bref,
"Un complet est toujours fermé".

Démonstration

Soit $u \in \overline{F}$. Il existe donc une suite $(u_n) \subset F$ qui converge vers u. Cette suite (u_n) est une suite de Cauchy de F ; comme F est complète, il existe $v \in F$ tel que $u_n \to v$. Par suite, $v = u$ (par unicité de la limite d'une suite) et donc $u \in F$.
On a démontré que $\overline{F} \subset F$.

■

Exemple 3.3.0.6. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, soit F une partie de E, différente de E, partout dense dans E (i.e. $\overline{F} = E$).*
Alors F ne saurait être complète. Vous voyez pourquoi ?

Exemple 3.3.0.7. *"Tu ne succomberas pas à la tentation de l'image".*
Soit E complet, $f : E \to F$ une application "sympathique", la sympathie allant jusqu'à être linéaire et continue (on reverra ça dans un chapitre suivant). Alors $f(E)$ n'est pas nécessairement une partie complète de F, ni même une partie fermée.

3.3.1 Compléments sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie d sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(e_1, ..., e_d)$ une base de E : tout $u \in E$ s'écrit d'une manière unique $u = x_1e_1 + ... + x_de_d$, où les x_i sont les éléments de $\mathbb{K}$ (on les appelle "coordonnées de u dans la base $(e_1, e_2, ..., e_d)$"). L'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{K}^d & \to & E \\ & x = (x_1, ..., x_d) & \mapsto & \varphi(x) := x_1e_1 + ... + x_de_d \end{array}$$

est linéaire et bijective, c'est clair. Au fond, "avoir E, c'est comme si on avait $\mathbb{K}^d$".
Comme conséquences (simples) :

- Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n. (quelconque), et si F **est un sous-espace vectoriel de dimension finie de** E, alors F est une partie **complète** et **fermée** de E.
- Si E est un e.v. **de dimension finie**, **toutes les normes y sont équivalentes** (on n'a pas dit "toutes les distances" !) ; elles définissent une et une seule topologie [c'est celle qu'on considère "naturellement" sur E, en l'absence d'autres instructions].

3.3.2 Compléments sur les séries dans les espaces vectoriels normés.

Comme on a pu déjà le constater pour les séries de termes généraux réels ou complexes (en 1^{er} cycle), il est extrêmement rare qu'on puisse deviner la somme d'une série pour démontrer qu'elle converge effectivement vers l'élément deviné ; on démontre en fait que le critère de Cauchy (pour les séries) est vérifié. C'est aussi ce qui se passe pour les séries dont les termes généraux sont dans des espaces vectoriels normés ; on travaille essentiellement dans le cadre des espaces de Banach.

Proposition 3.3.2.1. *(Critère de Cauchy pour les séries).*
*Soit $(E, \|.\|)$ un **espace de Banach** sur $\mathbb{K}$. Pour que la série de terme général u_n soit convergente, il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère (dit de Cauchy) suivant :*
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N\varepsilon$ tel que

$$(m > n \geq N\varepsilon) \Rightarrow (\|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_m\| \leq \varepsilon).$$

La démonstration consiste simplement à écrire que la suite $(S_n := u_0 + u_1 + ... + u_n)_n$ des sommes partielles de la série est une suite de Cauchy, donc convergente dans E complet (par hypothèse).

Une série dont le terme général u_n est dans un e.v.n. $(E, \|.\|)$ est dite normalement convergente si la série de terme général $\|u_n\|$ (à termes réels ≥ 0 donc) est convergente. Ce concept ainsi que le théorème qui suit ont été vus en 1^{er} cycle, essentiellement dans le contexte suivant : $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \|.\| = \|.\|_\infty$.

Théorème 3.3.2.2. *("Si Banach, convergence normale entraîne convergence").*
*Soit $(E, \|.\|)$ en **espace de Banach** sur $\mathbb{K}$. Si une série, de terme général u_n, est normalement convergente, elle est alors convergente. De plus :*

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration

- Par hypothèse, la série (**réelle**) de terme général $\|u_n\|$ est convergente ; elle est donc de CAUCHY :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que
  $$(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow (\|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + ... + \|u_m\| \leq \varepsilon).$$
  Posons $S_n := u_0 + u_1 + ... + u_n$. On a donc, d'après ce qui précède :
  $$\|S_m - S_n\| = \|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_m\| \leq \|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + ... + \|u_m\| \leq \varepsilon$$
  dès que $m > n \geq N_\varepsilon$.
  Par suite, $(S_n)_n$ est une suite de CAUCHY dans l'espace supposé complet E : elle converge donc dans E. La série de terme général u_n est donc convergente dans E.
- On a pour tout n :
  $$\|S_n\| \leq \|u_0\| + \|u_1\| + ... + \|u_n\|.$$
  A droite de cette inégalité : $\|u_0\| + \|u_1\| + ... + \|u_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.
  A gauche de cette inégalité : $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'après ce qui a été vu au 1^{er} point de la démonstration. Mais lorsque $v_n \to v$ dans E, $\|v_n\| \to \|v\|$ (on est bien d'accord ?) ; d'où $\|S_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|S\|$. Et le tour est joué.

■

Exemple 3.3.2.3. *Exponentielle de matrice.*
$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de la norme $\|.\|$ que vous voudrez.
$(E, \|.\|)$ est ainsi un espace de BANACH. *Etant donné $A \in E$, la série de terme général $\frac{A^n}{n!}$ (élément de E !) est convergente. Cela permet de définir :*

$$expA := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette construction ainsi que les propriétés de $A \mapsto expA$ sont essentielles ("incontournables" diraient les journalistes) en Analyse numérique matricielle, dans un cours sur les Equations différentielles vectorielles linéaires, en Automatique, etc. Bien des choses ont été dites à son sujet en premier cycle et en cours d'Analyse matricielle.

3.4 Parties compactes d'un espace métrique

Nous allons étudier ici les parties de E ayant la propriété décrite ci-dessous.

Définition 3.4.1. *Une partie K de (E,d) est dite* ***compacte*** *(ou* ***est un compact****) si de toute suite d'élément de K ont peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.*

Même si ça ne se voit pas immédiatement sur la définition, demander à K d'être compact, c'est beaucoup demander. Voici quelques propriétés élémentaires des parties compactes de E (on dit aussi "compacts de E").

Propriété 3.4.2. *Soit K une partie compacte de E. Alors :*

1. *K est fermée ;*
2. *K est complète ;*
3. *K est bornée ;*
4. *K est séparable.*
5. *Si $(u_n) \subset K$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence u, alors (toute) la suite (u_n) converge vers u.*

Démonstration

1. K est fermée car elle contient les valeurs d'adhérence de ses suites, et par conséquent, les limites de ses suites convergentes.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite de CAUCHY d'éléments de K ; elle possède une valeur d'adhérence $u \in K$, ce qui implique que u est la limite de la suite $(u_n)_n$ (est-on d'accord ?).
3. Supposons que K ne soit pas bornée, c'est-à-dire de diamètre infini : $\sup\{d(u,v) : u \in K, v \in K\} = +\infty$. Il existe alors $(u_n)_n \subset K, (v_n)_n \subset K$, telles que $d(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Etant donné que K est compacte, on peut extraire des sous-suites $(u_{n_k})_k$ et $(v_{n_k})_k$ convergent respectivement vers des éléments u et v de K (d'accord là-dessus ?). Donc $d(u,v) = \lim\limits_{k\to+\infty} d(u_{n_k}, v_{n_k}) = +\infty$, ce qui est impossible.
4. Résultat admis sans démonstration.
5. Supposons que (u_n) ne converge pas vers u, c'est-à-dire $\underset{n\to+\infty}{limsup}\ d(u_n,u) > 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ telle que $d(u_{n_k}, u) \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Mais $(u_{n_k})_k$ est une suite d'éléments du compact K et, à ce titre, possède une valeur d'adhérence $v (\in K)$. On en déduit $d(v,u) \geq \varepsilon$, ce qui contredit que u est l'unique valeur d'adhérence de (u_n).

$\blacksquare$

Introduisons les notions suivantes (Définition et Théorème), toujours dans un espace métrique (E,d). A passer en première lecture car hors programme.

Définition 3.4.3.

1. *Si* $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, *où les* O_i *sont des* ***ouverts*** *de* E, *on dit que* $\{O_i\}_{i\in I}$ *est un* ***recouvrement ouvert*** *de* E. *Si la famille des* $\{O_i\}_{i\in I}$ *est finie, on dit que le recouvrement (ouvert) est* ***fini****.*

   K ***vérifie la propriété de*** **BOREL**[1]**-LEBESGUE** *si - et c'est la définition - de tout recouvrement ouvert de* K *on peut extraire un recouvrement fini.*
2. *Une famille* $(F_i)_{i\in I}$ *de* ***fermés*** *de* E ***vérifie la propriété de l'intersection finie sur*** K *si - et c'est la définition -*

   $\forall J$ *partie* ***finie*** *de* I, *alors* $\bigcap_{i\in J}(K\cap F_i) \neq \emptyset$.

Munis de ce nouveau vocabulaire, nous allons caractériser les parties compactes K de E.

Théorème 3.4.4. *Les assertions suivantes relatives à* $K \subset E$ *sont* ***équivalentes*** *:*

1. K *est compacte ;*
2. K *vérifie la propriété de* BOREL-LEBESGUE *;*
3. *Si* $(F_i)_{i\in I}$ *est une famille de fermés de* E *vérifiant la propriété de l'intersection finie sur* K, *alors* $\bigcap_{i\in I}(K\cap F_i) \neq \emptyset$ *;*
4. K *est complète et, pour tout* $\varepsilon > 0$, K *peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon* ε.

La démonstration de [2.⇔3.] est facile : c'est un jeu de bascule de passer de l'ouvert O_i (*resp.* fermé F_i) au fermé $F_i := O_i^c$ (*resp.* à l'ouvert $O_i := F_i^c$).
La partie - essentielle - de l'équivalence entre 1. et 2. est plus longue et casse-pieds à démontrer... glissons. Cette équivalence ouvre la voie à ce qu'est la notion de "partie compacte" d'un espace topologique (E,τ) dont la topologie n'est pas définie à l'aide d'une distance (*cf.* chapitre 1) ; c'est effectivement comme cela qu'on procède. Reconnaissons que la notion de compacité, réduite au cas des espaces métriques (comme nous le faisons, nous) perd beaucoup de sa substance...Voir commentaires en fin du chapitre 1.

N'allons pas plus loin sans la célèbre caractérisation des parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie :

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont exactement les parties fermées et bornées de cet espace.

Sinon, si K est une partie compacte d'un e.v.n. de dimension infinie, elle est certes fermée et bornée (*cf.* Propriété 3.4.2) mais pour la réciproque on est loin du compte...

Proposition 3.4.5.

1. Emile BOREL(1871-1956), né et mort à S^t Affrique (Aveyron). Un des grands bonhommes de l'Analyse (et des Probabilités) du début du XX^{eme} siècle. Homme politique aussi (Maire, Conseiller général, Député, Ministre). Un petit pèlerinage à S^t Affrique s'impose.

1. *Si K compacte et si $F \subset K$ est fermée, alors F est compacte (En bref, "**un fermé dans un compact est compact**").*
2. *Une réunion finie de compacts est compacte.*
3. *Une intersection quelconque de compacts est encore compacte.*

Démonstration

1. Résultat immédiat à partir de la définition de "K compacte" et de la caractérisation de "F est fermée" à l'aide des suites.
2. Soit K_1 et K_2 deux compacts, et démontrons que $K_1 \cup K_2$ est encore compacte. On utilise pour cela - et pour changer - la propriété (caractéristique des compacts) de BOREL-LEBESGUE. Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$. Puisque K_1 et K_2 sont compacts, il existe deux parties finies J_1 et J_2 de I telles que
$$K_1 \subset \bigcup_{i \in J_1} O_i \text{ et } K_2 \subset \bigcup_{i \in J_2} O_i.$$
Donc, $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in J} O_i$, où $J := J_1 \cup J_2$ est une partie finie de I.
3. Si $\{K_i\}_{i \in I}$ est une famille de compacts, $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ est fermée (car intersection d'une famille de fermés), et K est contenue dans un compact, K_{i_0} ($i_0 \in I$) par exemple. Donc, K est compacte (d'après le résultat démontré en 1.).

■

Exercice 3.4.6. *La non-compacité de la boule-unité fermée de l'e.v.n. $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\begin{array}{lll} f_n(t) & := & 0 \text{ si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \text{ ;} \\ f_n(t) & := & 1 - nt \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \text{ (un petit dessin s.v.p.!)} \end{array}$$

- *Montrer que f_n est dans la boule-unité fermée (et même dans la sphère-unité fermée) de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'admet aucune valeur d'adhérence (c'est-à-dire aucune sous-suite convergente).*

Conclusion ?

Exercice 3.4.7. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 3.4.8. *Une propriété des compacts qui sert assez souvent.*
Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés non vides de E vérifiant :

$$\begin{array}{l} F_{n+1} \subset F_n \text{ pour tout } n \text{ ;} \\ F_n \subset K \text{ pour tout } n, \text{ où } K \text{ est un compact de } E. \end{array}$$

Alors $\bigcap_n F_n$ n'est pas vide.

Exercice 3.4.9. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite convergente de limite* u. *Montrer qu'alors* $K := \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ *est compacte.*

Exercice 3.4.10. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n. sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* A *et* B *deux parties non vides de* E. *Démontrer :*
$(A$ *fermée et* B *compacte* $) \Rightarrow (A + B$ *fermée* $)$ *;*
$(A$ *fermée et* B *fermée* $) \not\Rightarrow (A + B$ *fermée* $)$ *;*
$(A$ *compacte et* B *compacte* $) \Rightarrow (A + B$ *compacte* $)$.

Exercice 3.4.11. *Soit* $e_n \in l^2$ *définie comme suit :* $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ..., ..)$ *(comme d'habitude, 1 à la n-ème place, 0 partout ailleurs). Considérons la suite* $(a_n)_n$ *de* l^2 *construite comme suit :* $a_{2n} = e_n, a_{2n+1} = 0$. *Alors :*

- (a_n) *n'est pas convergente, elle n'est même pas de* CAUCHY *; démontrez-le.*
- (a_n) *n'a qu'une seule valeur d'adhérence, 0 en l'occurrence. Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la sphère-unité de* l^2 *?*

Les propriétés qui vont suivre, non démontrées (il suffit de les avoir vues une fois), sont mises ici pour faire toucher du doigt que **les compacts d'un e.v.n. de dimension infinie "sont rares"**.

1. Dans un e.v.n. de dimension infinie, les boules $B_f(0, r)$ (ou les sphères $S(0, r)$) ne sont jamais compactes.
   S'il se trouvait une boule $B_f(a, r)$ compacte dans l'e.v.n. E, c'est que E est de dimension finie...
2. Les parties compactes d'un e.v.n. de dimension infinie E sont des "pelures d'oignon", *i.e.* des ensembles d'intérieur vide. [On connait en effet de tels cas : $K = \{a_1, ..., a_p\}$ (nombre fini de points de E) ; $K :=$ fermé borné contenu dans un s.e.v. de dimension finie de E].

"La chasse aux compacts est désormais ouverte !"

Dans un e.v.n. de dimension infinie $(E, \|.\|)$, on a peu de chance de trouver "beaucoup" de parties compactes (pour la topologie définie par la norme $\|.\|$, appelée topologie forte parfois). Alors, que faire quand bien des théorèmes de l'Analyse (nous en verrons des exemples plus loin) demandent de la compacité dans leurs hypothèses ? Eh bien, envisager des topologies autres que celles définies par $\|.\|$, en fait des topologies non définies via des normes (ou même des distances), des topologies dites "faibles", topologies pour lesquelles il y a moins d'ouverts (des topologies plus économiques en quelques sorte) mais possédant par contre plus de compacts. La question de ces topologies faibles se pose déjà dans les espaces de HILBERT, exemples les plus simples d'e.v.n. de dimension non nécessairement finie.
Pour tout cela on attendra un Cours d'Analyse fonctionnelle de Master ; à chaque jour suffit sa peine...

Chapitre 4

Applications continues ; Applications uniformément continues, Homéomorphisme ; Applications linéaires continues ; Applications continues définies sur un compact ; Prolongements d'applications continues.

"Un phénomène intéressant à propos de l'extension à des espaces fonctionnels de résultats connus en dimension finie est qu'un résultat trivial en dimension finie peut se révéler significatif dans le cadre des espaces fonctionnels"

G. Birkhoff

On aborde dans ce chapitre la notion de continuité des applications définies sur un espace métrique et à valeurs dans un autre espace métrique. Les définitions et résultats ne sont pas surprenants, ils reproduisent ce qui a déjà été vu au 1^{er} cycle à propos des fonctions de la variable réelle, de plusieurs variables, etc.

4.1 Applications continues.

4.1.1 Aspect local : continuité en un point.

Définition 4.1.1.1. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$, et $a \in E$. On dit que f est **continue en** a si $f(u) \longrightarrow f(a)$ (dans (f,δ)) lorsque $u \longrightarrow a$ (dans (E,d)), c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \textit{ tel que } : (u \in E, d(u,a) < \eta) \Rightarrow (\delta(f(u), f(a)) < \varepsilon) \ (\diamond)$$

Ce qui s'écrit encore :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que :* $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$,
ou encore
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ *tel que :* $B(a,\eta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ [1]
avec $B(a,\eta)$ boules pour d et $B(f(a),\varepsilon)$ boules pour δ.

Dans "$<\eta$" ou "$<\varepsilon$" de $(\diamond)$, on peut mettre des inégalités larges si on veut, "$\leq \eta$" et/ou "$\leq \varepsilon$", ça n'a aucune importance.

Exercice 4.1.1.2. *Ecrire correctement, à l'aide de quantificateurs, que f **n'est pas** continue en a.*

Dans le contexte d'espaces topologiques généraux (*cf.* Chapitre 1, pages 19 et 20), la définition qu'on adopterait serait la suivante :

(f continue en a) $\Leftrightarrow$ (Pour **tout** voisinage W de $f(a)$ (dans F), il **existe** un voisinage V de a (dans E) tel que $f(V) \subset W$).

Dans le contexte des espaces métriques, on va pouvoir travailler avec les suites (au lieu de boules, voisinages, etc.). La **caractérisation** qui suit est très utile en pratique.

Théorème 4.1.1.3. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en a ;*
   et
2. *Pour toute suite $(x_n)_n$ convergente dont la limite est a, la suite $(f(x_n))_n$ des images par f est convergente et de limite $f(a)$.*

1. Si $B \subset F$, la notation $f^{-1}(B)$ est pour $\{x \in E : f(x) \in B\}$. Attention au fait que cette notation, usuelle mais ambigüe, peut faire penser -à tort- que f est bijective.

Démonstration

Facile ; copie de ce qui a été fait en 1^{er} cycle dans pareil contexte.

$\blacksquare$

Exercice 4.1.1.4. *Soit* $(E, <.,.>)$ *un espace préhilbertien réel ou complexe.*

- *Soit* $u_0 \in E$ *; montrer que la (dite) forme linéaire* $l : v \in E \mapsto l(v) :=< v, u_0 >$ *est continue en tout point* a *de* E.
- *Soit* $b : E \times E \mapsto b(u,v) :=< u, v >$ *est continue en tout point* (a, b) *de* $E \times E$.

Exercice 4.1.1.5. *Soit* $\varphi : (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1) \to \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(f) := f(\frac{1}{4})$ *(évaluation de* $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *au point* $\frac{1}{4}$*). Montrer que* φ *est linéaire mais n'est pas continue en* $f = 0$.

Exercice 4.1.1.6. *Soit* E *l'ensemble des fonctions polynomiales de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *On pose :* $P \in E \mapsto \|P\| := \max\limits_{x \in [0,1]} |P(x)|$.
   Montrer que $\|.\|$ *définit une norme sur* E.
2. *Etant donné* $x_0 \in \mathbb{R}$, *on définit* $\theta_{x_0} : P \in E \mapsto \theta_{x_0}(P) := P(x_0)$.
   - *Montrer que si* $x_0 \in [0,1]$, *alors (la forme linéaire)* θ_{x_0} *est continue en tout point* P *de* E.
   - *On fait* $x_0 = 2$ *ici ; montrer que* θ_2 *n'est continue en aucun point de* E.

Proposition 4.1.1.7. *(attendue bien sûr !)*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Si f *est continue en* a, *et si* g *est continue en* $b := f(a)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* a.

Démonstration

Aucune difficulté.

$\blacksquare$

4.1.2 Aspect global : continuité sur une partie

Définition 4.1.2.1. $f : E \to F$ *est dite* ***continue sur*** E *si elle est continue en tout point de* E.

Par suite (*cf.* Proposition 4.1.1.7.), si f est continue sur E et si g est continue sur F, alors $g \circ f$ est continue sur E.

Théorème 4.1.2.2. ***(Fondamental !)****. Soit* $f : E \to F$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue sur* E *;*

2. *Pour **tout ouvert** V de F, $f^{-1}(V)$ est un **ouvert** de E ;*
3. *Pour **tout fermé** W de F, $f^{-1}(W)$ est un **fermé** de E ;*
4. *Pour tout $X \subset E$, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.*

Attention aux pièges ! Les assertions 2. et 3. [qui sont les assertions équivalentes à 1. les plus importantes] s'expriment à l'aide d'**images réciproques**, tandis que 4. [assertion équivalente à 1. moins importante, il est vrai] s'exprime à l'aide d'**images directes**.

Démonstration du Théorème 4.1.2.2.

1.⇒4. Soit $u \in \overline{X}$; il existe donc $(u_n)_n \subset X$ de limite u. Puisque f est continue sur E, en u notamment, la suite $(f(u_n))_n$ est convergente et de limite $f(u)$ (*cf.* Théorème 4.1.1.3.). Comme $f(u_n) \in f(X)$ pour tout n, on a bien $f(u) \in \overline{f(X)}$.

4.⇒3. Soit W un fermé de F et soit $X := f^{-1}(W)$. Comme $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ (d'après l'énoncé 4.) et que $f(f^{-1}(W)) = W \cap f(E)$ (on est d'accord ?), on a $f(\overline{X}) \subset \overline{W} = W$. Donc $\overline{X} \subset f^{-1}(f(\overline{X})) \subset f^{-1}(W) =: X$ (car l'inclusion $\overline{X} \subset f^{-1}(f(\overline{X}))$ est toujours vraie). Avoir $\overline{X} \subset X$ c'est bien dire que X est fermé.

3.⇒2. Avec le jeu de bascule évidemment...
Soit V un ouvert de F. Alors V^c est un fermé de F et, d'après 3., $f^{-1}(V^c)$ est un fermé de E. Mais $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ (si si !), d'où le caractère ouvert de $f^{-1}(V)$.

2.⇒1. Considérons, pour $\varepsilon > 0$, l'ouvert $B(a, \varepsilon)$. Comme $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est une ouvert (d'après 2.), et se rappelant ce qu'est une partie ouverte de E, on est aussi assuré de existence de $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Et le tour est joué (revoir la Définition 4.1.1.1. si nécessaire).

■

Exercice 4.1.2.3. *Montrer que $f : E \to F$ est continue sur E si, et seulement si, l'image $(f(x_n))_n$ de **toute** suite convergente $(x_n)_n$ de E est convergente (dans F évidemment).*

Exercice 4.1.2.4. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer :*

$$\begin{aligned}(f \text{ continue sur } E) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall r \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) < r\} \text{ et } \{x \in E : f(x) > r\} \text{ sont ouverts}). \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall r \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) \leq r\} \text{ et } \{x \in E : f(x) \geq r\} \text{ sont fermés}).\end{aligned}$$

Bref, on n'a pas besoin de "scanner" tous les ouverts (*resp.* fermés) de $\mathbb{R}$. Et si l'on suppose seulement $(\forall r \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}, f(x) \leq r\})$ est fermé ? Hé hé...

Exercice 4.1.2.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

- *Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors son graphe $gr\ f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
- *Montrer sur un exemple que la réciproque peut être fausse.*

Exercice 4.1.2.6. *Soit $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) := x$, application évidemment (linéaire et) continue sur $\mathbb{R}^2$. Trouver une partie fermée X de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(X)$ ne soit pas fermée. Cela contredit-il l'équivalence 1.⇔4. du Théorème 4.1.2.2. ?*

Exercice 4.1.2.7. *Soit* $(E, \|.\|_1)$ *et* $(F, \|.\|_2)$ *deux e.v.n., soit* $f : E \to F$ *que l'on suppose linéaire et continue sur* E. *Montrer que* $\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\}$ *est un fermé de* E. *Quid de* $Imf := \{f(x) : x \in E\}$ *?*

Théorème 4.1.2.8. *Soit* f *et* $g : E \to F$ *toutes les deux* ***continues sur*** E. *On suppose qu'il existe* A ***partout dense*** *dans* E *telle que* $f(a) = g(a)$ *pour tout* $a \in A$. *Alors* $f = g$, *c'est-à-dire* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in E$.

Résultat très facile à démontrer, résultat important néanmoins. Les exemples de son utilisation foisonnent...

Opérations préservant la continuité de fonctions numériques.

Proposition 4.1.2.9. *Soit* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues sur* E. *Alors sont aussi continues sur* E *les fonctions suivantes :*
$f + g$, rf *(où* $r \in \mathbb{R}$*)*, $f.g$, $\max(f, g)$, $|f|$, f^+, f^-.
Si $f : E \to \mathbb{R}$ *est continue en* a *et si* $f(a) \neq 0$, *alors* $\frac{1}{f}$ *est continue en* a.

Les démonstrations sont quasiment les mêmes que celles faites pour les fonctions de la variable réelle ou de plusieurs variables réelles.

Exercice 4.1.2.10. *Continuité de la "fonction record".*
Soit $\theta : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[t_0, +\infty[$ *(*$\theta(t)$ *peut être l'évaluation à la date* t *d'une température, du cours d'un produit à la Bourse, de la hauteur du niveau d'eau à un barrage, etc.). On pose :* $f(t) := \max\{\theta(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$ *;* f *marque l'évolution avec* t *du record de* θ.
Montrer que f *est (croissante et) continue sur* $[t_0, +\infty[$.

Exercice 4.1.2.11. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue sur* E, *et* A *une partie non vide de* E. *Montrer :*

$$\sup\{f(u) : u \in A\} = \sup\{f(u) : u \in \overline{A}\}.$$

4.2 Applications uniformément continues. Homéomorphismes.

4.2.1 La continuité uniforme

Définition 4.2.1.1. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$. On dit que f est **uniformément continue sur** E lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } : \begin{pmatrix} u \in E, v \in E \\ d(u,v) \leq \eta \end{pmatrix} \Rightarrow (\delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon). \ (\diamond\diamond)$$

C'est évidemment une propriété plus forte que la continuité ; sa définition n'est en rien plus compliquée que celle déjà vue et étudiée pour les fonctions numériques de la variable réelle. Contrairement à la continuité (Théorème 4.1.2.2.), on ne peut caractériser l'uniforme continuité sur E par des propriétés d'images réciproques d'ouverts (ou de fermés).

Exercice 4.2.1.2. *Ecrire correctement, à l'aide de quantificateurs, que f **n'est pas** uniformément continue sur E.*
Procédé très commode : Montrer que si l'on trouve $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $d(u_n, v_n)$ tende vers 0 (quand $n \to +\infty$) et $\delta(f(u_n), f(v_n))$ ne tende pas vers 0, alors f ne saurait être uniformément continue sur E.

Exercice 4.2.1.3. *Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel.*
- *Montrer qu'à $u \in E$ fixé, l'application $v \in E \mapsto < u, v >$ est uniformément continue sur E (et même Lipschitzienne sur E).*
- *Montrer que $b : (u,v) \in E \times E \mapsto b(u,v) :=< u, v >$ n'est pas uniformément continue sur $E \times E$.*

Proposition 4.2.1.4. [*Résultat attendu*] *Si f est uniformément continue sur E, et si g est uniformément continue F, alors $g \circ f$ est uniformément continue sur E.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ g \circ f & \searrow & \downarrow \quad g \\ & & G \end{array}$$

Exercice 4.2.1.5. [*Un grand classique*] *"La croissance en norme au plus linéaire d'une application uniformément continue".*
Soit $(E, \|.\|_1)$ et $(F, \|.\|_2)$ deux e.v.n. réels ou complexes, soit $f : E \to F$ uniformément continue sur E. Montrer qu'il existe alors a et b réels > 0 tels que :

$$\|f(u)\|_2 \leq a\|u\|_1 + b \text{ pour tout } u \in E.$$

4.2.2 La notion d'homéomorphisme.

Origines de ce vocable, utilisé en Mathématiques mais aussi en Cristallographie ;
rappelons-nous nos anciens cours de grec (if any !) :
homéo- = semblable ← **homoios**, semblable ;
morph-/morpho- = forme ← **morphê**, forme ;
-isme ← **ismo**-, suffixe servant à former des noms d'après les verbes en -izein.

Définition 4.2.2.1. *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$. On dit que f est un* ***homéomorphisme de E sur F*** *lorsque :*

1. *f est une bijection de E sur F ;*
2. *f est continue sur E ;*
3. *$f^{-1} : F \to E$ est continue sur F.*

Attention à la dernière exigence 3. que l'on oublie trop souvent ! Evidemment dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$ on ne voit pas trop la nécessité de requérir 3. (euh... pourquoi ?).
On dit que (E, d) et (F, δ) sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de E (*i.e.* de (E, d)) sur F (*i.e.* sur (F, δ)).
Naturellement, l'inverse f^{-1} d'un homéomorphisme f de E sur F est un homéomorphisme de F sur E, la composée $g \circ f$ d'un homéomorphisme f de E sur F et d'un homéomorphisme g de F sur G est un homéomorphisme de E sur G.
Il n'y aurait aucune difficulté à étendre la définition d'un homéomorphisme (vue en Définition 4.2.2.1.) au cas de deux espaces topologiques généraux (E, τ_1) et (F, τ_2).
On peut - et ce sera fait plus tard dans l'année, lors du deuxième semestre d'enseignement - introduire des notions semblables (et plus fortes) ou seul le préfixe change, par exemple :
difféomorphisme (déjà vu en Calcul intégral, dans la technique du changement de variables) ;
lipéomorphisme (de **Lip**schitz bien sûr).

Exercice 4.2.2.2. *Soit $f : E := [0, 1[\cup\{2\} \to F := [0, 1]$ définie comme suit : $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$, $f(2) = 1$.*
Montrer que f est bijective et continue, mais que f^{-1} n'est pas continue.

Pourtant un résultat sur les fonctions numériques de la variable réelle, vu en 1^{ere} année (en L1), assure dans à peu près les mêmes conditions la continuité de f^{-1}... Où est le problème ?

Exercice 4.2.2.3.

1. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :*
   - *Pour tout $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction "le long de $\overrightarrow{v}$" $\varphi_{\overrightarrow{v}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{\overrightarrow{v}}(t) := f(t\alpha, t\beta)$ est continue en 0 ;*
     et, pourtant,
   - *La fonction f elle-même n'est pas continue en $(0, 0)$. [C'est la continuité vs la "continuité radiale"].*
2. *Un* ***arc*** *σ à valeurs dans un e.v.n. $(E, \|.\|)$ est une application continue de $[0, 1]$ dans E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence suivante :*

   (f est continue sur E) $\Leftrightarrow$ (Pour tout arc σ à valeurs dans E, $f \circ \sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[0, 1]$).

Exercice 4.2.2.4. *$(E, \|.\|)$ est homéomorphe à sa boule unité ouverte.*
Soit un e.v.n. $(E, \|.\|)$ et $f : E \to B(0, 1)$ définie par : $f(u) := \dfrac{u}{1 + \|u\|}$. Montrez que f est un homéomorphisme de E sur $B(0, 1)$ (lequel est structuré en espace métrique grâce à la restriction de la distance de E (déduite de $\|.\|$) à $B(0, 1)$).

Exercice 4.2.2.5. *Dans l'e.v.n.* $(E, \|.\|)$ *on définit* $f(u) := \dfrac{u}{\|u\|}$ *dès lors que* $u \neq 0$. *Montrer :*

$$\forall u \neq 0, v \neq 0, \|f(u) - f(v)\| \leq \frac{2}{\|u\|}\|u - v\|.$$

Conséquences sur la continuité ou le caractère Lipschitz de l'application f ?

4.3 Applications linéaires continues

Ah ! en voilà un paragraphe important ! La **linéarité** va (complètement) changer notre univers de continuité...

4.3.1

Dans tout le paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps de scalaires $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme d'habitude ; de plus $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont des e.v.n..

On note $\mathcal{LC}(E, F)$, ou simplement $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications $A : E \to F$ qui sont **linéaires et continues** sur E[2]. On écrit souvent Au au lieu de $A(u)$ (mais attention ! A n'est pas une matrice).
Lorsque $F = \mathbb{K}$, l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des **formes linéaires continues** sur E est noté E' (mais aussi E^* dans la littérature internationale). Si $\varphi \in E'$ et $u \in E$ l'action de φ sur u, soit $\varphi(u)$, est souvent noté $< \varphi, u >$ ($< ., . >$ est parfois appelé le "crochet de dualité", mais il n'y a pas de produit scalaire ici ! ... quoique dans le cas d'un espace préhilbertien E on n'en est pas très loin, *cf.* infra).

Quand $A : E \to F$ est linéaire, sa continuité se vérifie d'une manière très particulière (et plus facile que dans le cas général).

Théorème 4.3.1.1. *(**Absolument fon-da-men-tal !**)*
*Soit $A : E \to F$ dont on a déjà vérifié qu'elle est **linéaire**. Alors les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :*

1. *A est continue en un point (quelconque) u_0 de E, en $u_0 = 0$ par exemple ;*
2. *A est continue sur E (en tout point u de E, donc) ;*
3. *L'image $A(B)$ de toute partie bornée B de E est une partie bornée de F ;*
4. *Il existe une constante $L \geq 0$ tel que :*

$$\|A(u)\|_F \leq L.\|u\|_E \text{ pour tout } u \in E. \ (\diamond \diamond \diamond).$$

Méditer quelques instants sur la puissance de ce théorème...
Lorsque A est linéaire et qu'on cherche à démontrer qu'elle est continue, on ne revient jamais à la définition générale de la continuité avec des $\varepsilon > 0, \eta > 0$, tutti quanti... Le faire sur une copie est très mal vu par un correcteur, vous voyez ce que je veux dire ? ....
L'équivalence 2.$\Leftrightarrow$ 4. est celle du Théorème 4.3.1.1. qui sert le plus souvent.
L'assertion 3. explique pourquoi $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est parfois appelé "opérateur borné".

Démonstration du Théorème 4.3.1.1.

1.$\Rightarrow$4. On suppose A continue en u_0, en $u_0 = 0$ par exemple. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que : $(\|u\| \leq \eta) \Rightarrow (\|A(u)\| \leq 1)$.[3]

2. C'est une habitude d'écrire $A : E \to F$ plutôt que $f : E \to F$ pour une application qui est linéaire...
3. Le contexte indique clairement s'il s'agit de $\|.\|_E$ ou de $\|.\|_F$.

Soit $v \neq 0$ quelconque dans E ; considérons $\frac{\eta}{\|v\|}v$, vecteur de norme égale à η (ça été fait pour) ; on a alors :

$$\|\frac{\eta}{\|v\|}A(v)\| = \|A(\frac{\eta}{\|v\|}v)\| \leq 1,$$

d'où

$$\|A(v)\| \leq \frac{1}{\eta}\|v\|.$$

Le cas $v = 0$ est trivial puisque $A(0) = 0$.

En bref, on a l'inégalité de 4. avec $L = \frac{1}{\eta}$ par exemple.

Démonstration pratiquement identique si A est supposée continue en $u_0 \neq 0$.

4.⇒3. Soit B une partie bornée de E : il existe $r > 0$ tel que $\|u\| \leq r$ pour tout $u \in B$. Soit $v \in A(B)$: $v = A(u)$ pour un certain $u \in B$, un au moins. Alors $\|u\| = \|A(u)\| \leq L\|u\| \leq Lr$. Donc $A(B)$ est bornée.

3.⇒4. $B_f(0,1)$ est une partie bornée de E ; donc $A[B_f(0,1)]$ est une partie bornée de F. Autrement dit, il existe $L \geq 0$ tel que

$$(\|u\| \leq 1) \Rightarrow (\|A(u)\| \leq L).$$

Si v est quelconque mais $\neq 0$, on procède par "homogénéisation" :
$v = \|v\|\frac{v}{\|v\|}$, d'où $A(v) = \|v\|A(\frac{v}{\|v\|})$ de sorte que

$$\|A(v)\| = \|v\|\|A(\frac{v}{\|v\|})\| \leq \|v\|L.$$

Le cas $v = 0$ est trivial.

4.⇒2. Démontrons ceci :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \textit{ tel que } : (\|u - v\| \leq \eta) \Rightarrow (\|A(u) - A(v)\| \leq \varepsilon),$$

ce qui est plus que 2..

Le $\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons $\eta := \frac{\varepsilon}{L}$; alors, si $\|u - v\| \leq \eta$,

$\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\| \leq L\|u - v\| \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

2.⇒1. ne demandant pas de démonstration, la démonstration du Théorème 4.3.1.1. est terminée.

■

L'objectif pour démontrer la continuité de $A : E \to F$ linéaire est de trouver un $L \geq 0$ pour lequel $(\diamond\diamond\diamond)$ a lieu. Le "meilleur" de ces L joue un rôle particulier et fournit naturellement une **norme** sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Théorème 4.3.1.2. ***(Essentiel !)***
Pour $A \in \mathcal{L}(E,F)$, *posons* $\nu(A) := \inf\{L \geq 0 : (\diamond\diamond\diamond)$ *a lieu* $\}$.
Alors :

1. $\nu(A) = \sup_{u \neq 0} \dfrac{\|A(u)\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E = 1} \|A(u)\|_F = \sup_{\|u\|_E \leq 1} \|A(u)\|_F$.
2. ν *définit une* ***norme*** *sur* $\mathcal{L}(E,F)$.

La démonstration de 1. est très facile, il suffit de jouer avec la linéarité de A et la technique d'"homogénéisation" : $u = \|u\| \dfrac{u}{\|u\|}$ lorsque $u \neq 0$.
Dans la démonstration de 2., seule l'inégalité triangulaire demande un peu de travail... et encore.

■

Cette norme naturelle ν sur $\mathcal{L}(E,F)$ sera désormais notée $|||.|||$ [4] (et appelée "norme triple"). Sauf mention explicite du contraire, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est toujours supposé muni de cette norme.
Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, la norme ν sur E' (ou E^*) sera notée $\|.\|'$ (ou $\|.\|^*$).
Quand il s'agit de déterminer $|||A|||$, la technique employée est à peu près toujours la même :
- On majore, le plus finement possible, $\|A(u)\|$ par une constante (notée L) fois $\|u\|$: Alors L est un candidat à être $|||A|||$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve u_ε, $\|u_\varepsilon\| = 1$, tel que $L - \varepsilon \leq \|A(u_{\varepsilon)})\|$. (En effet on n'a jamais dit - et ce serait faux - que le sup était atteint dans les différentes expressions de 1. du Théorème 4.3.1.2.).

Moyennant quoi on est assuré d'avoir $L = |||A|||$.

Remarques :
- On a l'inégalité fondamentale suivante (pour $A \in \mathcal{L}(E,F)$) :
  $\forall u \in E, \|A(u)\|_F \leq |||A|||.\|u\|_E$. $(\mathcal{I})$
- Lorsque $A \in \mathcal{L}(E,F)$, on a en fait que A est Lipschitzienne sur E :
  $\forall (u,v) \in E \times E, \|A(u) - A(v)\|_F \leq |||A|||.\|u - v\|_E$ (on est bien d'accord ?).
- "Lorsque qu'on peut composer..." :
  Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$ bien sûr, et
  $$|||B \circ A||| \leq |||B|||.|||A|||$$
  [Il suffit pour voir cela d'appliquer l'inégalité fondamentale $(\mathcal{I})$ ci-dessus deux fois de suite].
  En particulier faisons $E = F = G$; alors $|||A^n||| \leq (|||A|||)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (où A^n désigne $A \circ A \circ ... \circ A$, n fois).
  Mais attention ! on n'a pas dit - et ce serait faux - que toute norme ν sur $\mathcal{L}(E)$ vérifie $\nu(A \circ B) \leq \nu(A)\nu(B)$.

Exercice 4.3.1.3. *Soit* $x \in [a,b]$ *et* $\delta_x : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :* $\delta_x(f) = f(x)$ *(*δ_x *s'appelle la fonctionnelle d'évaluation en* x *ou* ***masse de* DIRAC *en*** x*). Alors* δ_x *est une forme linéaire continue sur* $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *et* $\|\delta_x\|' = 1$ (vous *sauriez le démontrer ?).*

4. Naturellement, elle dépend du choix de $\|.\|_E$ (sur E) et $\|.\|_F$ (sur F).

Changeons à présent de structure d'e.v.n. en considérant $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_1)$. *Alors* δ_x *est une forme linéaire non continue sur* $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_1)$, *c'est-à-dire que pour tout (candidat)* $L \geq 0$, *on peut trouver* $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *tel que* $|f(x)| > L\|f\|_1$ *; comment donc ?*

Proposition 4.3.1.4. *Si* $(E,\|.\|)$ *est de dimension finie (espace* ***de départ*** *donc !), alors toute application linéaire sur* E *est continue sur* E.

Toujours ça de gagné...

Démonstration

Soit $\{e_1,...e_d\}$ une base de E. Tout $u \in E$ s'écrit d'une manière unique
$u = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_de_d$. Toutes les normes étant équivalentes sur E (d'accord ?), il existe $C \geq 0$ tel que $\max_i |x_i| \leq C\|u\|$ (toujours d'accord ?). Par suite :

$$\begin{aligned}\|A(u)\| &\leq |x_1|\|A(e_1)\| + ... + |x_d|\|A(e_d)\| \\ &\leq (\max_i |x_i|)(\|A(e_1)\| + ... + \|A(e_d)\|) \leq L\|u\|,\end{aligned}$$

où $L := C(\|A(e_1)\| + ... + \|A(e_d)\|)$.

■

Une forme linéaire φ sur E ($\varphi : E \to \mathbb{K}$) n'est pas toujours continue ; c'est donc bien la dimension finie de l'espace de départ (et non d'arrivée) qui fait marcher les choses dans la Proposition 4.3.1.4..

4.3.2 Le cas particulier important des formes linéaires ($F = \mathbb{K}$)

$(E,\|.\|)$ est un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E. **Comment relier les propriétés de** $\ker\varphi$ (le noyau de φ, c'est-à-dire $\{x \in E : \varphi(x) = 0\}$) **et la propriété de continuité de** φ ? C'est l'objet de ce sous-paragraphe.
On supposera que $\varphi \not\equiv 0$, car sinon $\ker\varphi = E$, d'un intérêt très limité...
Commençons par un résultat d'Algèbre linéaire (où la Topologie n'intervient aucunement).

Proposition 4.3.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. H *est un hyperplan de* E *;*
2. *Il existe une forme linéaire non nulle* φ *sur* E *telle que* $H = \ker\varphi$ *;*
3. *Il existe* $v \in E$ *tel que* $E = H \oplus (\mathbb{K}v)$ *(somme directe de* H *et de la droite vectorielle dirigée par* v*,* $\mathbb{K}v$*).*

Rappelons que la définition première d'un **hyperplan** est comme suit :
Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E lorsque :

$$\begin{pmatrix} V\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E \\ H \subset V \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V = H \\ ou\ V = E \end{pmatrix}.$$

La représentation d'un hyperplan H de E "sous la forme d'équation", i.e. comme en 2. :

$$x \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \text{ (où } \varphi \text{ est une forme linéaire, non nulle sur } E),$$

ou bien comme un sous-espace vectoriel en somme directe avec une droite vectorielle, i.e. comme en 3., était habituelle en dimension finie (lorsque $dim_{\mathbb{K}}E = d < +\infty$) ; attention aux mauvais tours que pourrait jouer une intuition s'appuyant exclusivement sur cet environnement (après tout, $(+\infty) - 1 = +\infty$!).

Théorème 4.3.2.2. *Soit H un hyperplan* ***fermé*** *de E d'équation $\varphi(x) = 0$ (où φ est une forme linéaire non nulle sur E). Alors φ est* ***continue*** *sur E.*

Démonstration facile, mais qui ne coule pas de source ; on ne pourrait néanmoins espérer un résultat analogue avec $\varphi : E \to F$ linéaire et F autre que $\mathbb{K}$ (on n'a que l'implication : (φ continue) $\Rightarrow$ ($\ker \varphi$ fermé)).
L'adhérence $\overline{V}$ d'un sous-espace vectoriel V de E est encore un sous-espace vectoriel (à redémontrer si nécessaire). Par conséquent :

Si $H = \ker \varphi$ (φ forme linéaire non nulle sur E) est un <u>hyperplan</u> de E, on a deux, et seulement deux, possibilités :
$\underline{H}$ est <u>fermé</u> $\Leftrightarrow$ φ est <u>continue</u> sur E ;
$\overline{H} = E$ (H est <u>partout dense</u> dans E) $\Leftrightarrow$ φ n'est <u>continue en aucun point</u> de E.

Exercice 4.3.2.3. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ structuré en e.v.n. par la norme $\|.\|_\infty$.*

1. *Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f \in E \mapsto \varphi(f) := \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.*
   Montrer que $\varphi \in E'$ et déterminer $\|\varphi\|'$.
2. *Soit $A : E \to E$ définie comme suit :*

$$f \in E \mapsto (A(f) : t \in [a,b] \mapsto [A(f)](t) := \int_a^t f(s)ds).$$

Vérifier que A est bien à valeurs dans E, que $A \in \mathcal{L}(E)$, et calculer $|||A|||$.

Exercice 4.3.2.4. *<u>(Facile, intuitivement clair, mais important !)</u>*
Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien réel, soit $a \in H$ fixé, et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $x \in E \mapsto \varphi(x) := <a, x>$.
Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E, de noyau $H = \{a\}^\perp$, et que

$$\|\varphi\|' = \|a\|,$$

avec $\|\varphi\|'$ norme de la forme linéaire continue φ ($\varphi \in E'$) et $\|a\|$ norme de a dans E (norme hilbertienne déduite de $<.,.>$).

Exercice 4.3.2.5. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ soit $p \in E$ donnée (appelée* ***fonction poids****), et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f \in E \mapsto \varphi(f) := \int_a^b f(t)p(t)dt.$$

1. *Soit E structuré en e.v.n. par la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que $\varphi \in E'$ (c'est facile) et que $\|\varphi\|' = \int_a^b |p(t)|dt$ (c'est plus difficile).*
2. *Supposons E structuré en e.v.n. par la norme $\|.\|_1$. Montrer que $\varphi \in E'$ (c'est facile) et que $\|\varphi\|' = \max_{t\in[a,b]} |p(t)|$ (c'est plus difficile).*

Exercice 4.3.2.6. *(Plus difficile que les précédents).*
*Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée (appelée **fonction noyau**, because K is for... ?). Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ structuré en e.v.n. par la norme $\|.\|_\infty$. On définit :*

$$f \in E \mapsto (A(f) : t \in [a,b] \mapsto [A(f)](t) := \int_a^b K(t,s)f(s)ds).$$

Vérifier que A est bien à valeurs dans E, que $A \in \mathcal{L}(E)$, et que $|||A||| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds.$

4.3.3 Prolongement des idées et techniques au cas des applications multilinéaires continues.

Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois e.v.n. et $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Ayant mis sur $E \times F$ une des normes "naturelles" dans pareil contexte (par exemple celle qui à $(u,v) \in E \times F$ associe $\|(u,v)\|_{E\times F} := \max(\|u\|_E, \|v\|_F)$), on peut se poser la question : **comment caractériser la continuité de** b ? La réponse est fournie par le Théorème 4.3.3.1. ci-dessous, à mettre en parallèle avec le Théorème 4.3.1.1..

Théorème 4.3.3.1. *Soit $b : E \times F \to G$ dont on a déjà vérifié qu'elle est **bilinéaire**. Alors les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :*

1. *b est continue au point $(0,0)$;*
2. *b est continue sur $E \times F$ (en tout point $(u,v) \in E \times F$, donc) ;*
3. *Il existe $L \geq 0$ tel que :*

$$\|b(u,v)\|_G \leq L\|u\|_E.\|v\|_F \text{ pour tout } (u,v) \in E \times F. \ (\diamond\diamond\diamond\diamond)$$

La démonstration est une adaptation facile de celle du Théorème 4.3.1.1.. Il en est de même du Théorème 4.3.3.2. ci-dessous, à mettre en parallèle avec le Théorème 4.3.1.2..

Théorème 4.3.3.2. *Pour b bilinéaire continue de $E \times F$ dans G, on pose :*

$$\nu(b) := \inf\{L \geq 0 : (\diamond\diamond\diamond\diamond) \text{ a lieu}\}.$$

Alors :

1. $$\begin{aligned} \nu(b) = \sup_{u\neq 0, v\neq 0} \frac{\|b(u,v)\|_G}{\|u\|_E.\|v\|_F} &= \sup_{\|u\|\leq 1, \|v\|\leq 1} \|b(u,v)\|_G \\ &= \sup_{\|u\|=1, \|v\|=1} \|b(u,v)\|_G. \end{aligned}$$
2. *ν définit une **norme** sur l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G*

Cette norme naturelle est parfois notée $|||b|||$.[5]

Exemple 4.3.3.3. *(Fondamental).*
Soit $(E, <.,.>)$ *un espace préhilbertien réel et* b *la forme bilinéaire* $(u, v) \in E \times E \mapsto b(u, v) :=< u, v >$. *Alors* b *est continue. En effet :*

$$| < u, v > | \leq \|u\|.\|v\| \text{ pour tout } (u, v) \in E \times E$$

(encore et toujours cette inégalité de CAUCHY-SCHWARZ *!). Il n'est d'ailleurs pas difficile de montrer que* $|||b||| = 1$.

Exercice 4.3.3.4. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n. réel ou complet, soit*

$$\begin{array}{rccl} b: & E' \times E & \to & \mathbb{K} \\ & (\varphi, u) & \mapsto & b(\varphi, u) := \varphi(u) \text{ (noté aussi } < \varphi, u >). \end{array}$$

Alors b *est bilinéaire continue (appelée parfois* ***application bilinéaire de dualité****). En effet :*

$$|b(\varphi, u)| = |\varphi(u)| \leq \|\varphi\|'\|u\| \text{ pour tout } \varphi \in E' \text{ et } u \in E.$$

Exercice 4.3.3.5. [*Revoir la 3ème remarque du Chapitre 4 page 60 si nécessaire*].
Soit $\begin{array}{rccl} c: & \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{L}(E, G) \\ & (B, A) & \mapsto & c(B, A) := B \circ A. \end{array}$
Alors c *est bilinéaire continue, et on peut même montrer que* $|||c||| = 1$.

Proposition 4.3.3.6. *Si* E *et* F *sont de dimension finie (composant l'espace* $E \times F$ ***de départ*** *!), toute application bilinéaire sur* $E \times F$ *est continue sur* $E \times F$.

Démonstration

Celle de la Proposition 4.3.1.4. mutatis mutandis. ■

Exemple 4.3.3.7. *Soit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *structuré en e.v.n. à l'aide d'une norme (quelconque)* $\|.\|$. *Il existe alors* $L \geq 0$ *tel que :*

$$\|AB\| \leq L\|A\|.\|B\| \text{ pour tout } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Que L *puisse être égale à 1 dépend du choix de* $\|.\|$.

Ce que nous avons fait pour les applications bilinéaires s'étend sans grande difficulté aux applications tri, quadri, ... , multilinéaires. Une application $c : E \times F \times G \to H$, trilinéaire, est continue si, et seulement si, il existe $L \geq 0$ tel que

$$\|c(u, v, w)\|_H \leq L\|u\|_E\|v\|_F\|w\|_G \text{ pour tout } (u, v, w) \in E \times F \times G.$$

Alors $\nu(c) = \inf\{L \geq 0 : \text{inégalité ci-dessus a lieu}\}$ définit une norme sur l'ensemble des applications trilinéaires continues de $E \times F \times G$ dans H. Et puis on mouline...

5. Attention aux confusions... il faudra parfois préciser de quoi on parle.

Exemple 4.3.3.8. *<u>L'exemple le plus célèbre d'application multilinéaire.</u>*
Soit

$$\begin{array}{rcl} d: \quad \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times ... \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ v = (v^1, v^2, ..., v^n) & \mapsto & d(v) := det \begin{bmatrix} . & . & & . \\ . & . & & . \\ v^1 & v^2 & ... & v^n \\ . & . & & . \end{bmatrix} \end{array}$$

Alors, d est multilinéaire continue.
Quelle que soit la norme $\|.\|$ choisie sur $\mathbb{K}^n$, on est assuré de l'existence de $L \geq 0$ tel que

$$\left| det \begin{bmatrix} . & . & & . \\ . & . & & . \\ v^1 & v^2 & ... & v^n \\ . & . & & . \end{bmatrix} \right| \leq L\|v^1\|\|v^2\|...\|v^n\|.$$

4.4 Applications continues définies sur un compact.

Revenons au contexte général des applications continues f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ). Plus précisément on a, en pratique, la situation suivante :

$$f : E \to F,\ A \subset E \text{ et } f \text{ continue sur } A.$$

Le premier grand théorème général concernant les applications continues sur un compact est le suivant.

Théorème 4.4.1. *Soit (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, $A \subset E$ une partie* ***compacte****, $f : A \to F$* ***continue*** *sur A ; alors $f(A)$ est une partie* ***compacte*** *de (F, δ).*

In a few words, "L'image continue d'un compact est un compact".

Démonstration

Soit $(y_n)_n$ une suite de points de $f(A)$; on va essayer d'extraire de $(y_n)_n$ une suite convergente dans $f(A)$.
Pour tout n, il existe $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_n$ étant dans A, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge (disons vers a $(\in A)$). Puisque f est continue, la suite $(f(x_{n_k}))_k$ est convergente de limite $f(a)$ (cf. Théorème 4.1.1.3., page 51 Chapitre 4). Donc on a bien ce qu'on voulait.

∎

Lorsque f est une fonction numérique (à valeurs réelles donc), le résultat qui suit est d'une **grande importance** dans ce qu'on appelle l'Optimisation (= résolution des problèmes d'extremum) ; il donne une condition suffisante d'**existence** de minimiseurs et de maximiseurs d'une fonction sur un compact.

Théorème 4.4.2. *(K. Weierstrass,* ***fon-da-men-tal !****)*
Soit A une partie compacte de E, soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ continue sur A. Alors :

1. *f est majorée et minorée sur A ;*
2. *Il existe $\underline{u} \in A$ et $\overline{u} \in A$ (peut-être plusieurs !) tels que*

$$f(\underline{u}) = \inf_{u \in A} f(u)\ ,\ f(\overline{u}) = \sup_{u \in A} f(u)$$

(on écrit $f(\underline{u}) = \min_{u \in A} f(u)$, $f(\overline{u}) = \max_{u \in A} f(u)$ dans ces cas-là).

En bref,
"Une fonction numérique continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes".

Démonstration

Très simple. D'après le Théorème 4.4.1., $f(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$.

Donc $\begin{array}{l} M := \sup\limits_{u \in A} f(u) \ (:= \sup f(A)) < +\infty \text{ et} \\ \mu := \inf\limits_{u \in A} f(u) \ (:= \inf f(A)) > -\infty. \end{array}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < f(u_n)$ $(\leq M)$ (pourquoi un tel u_n existe ?). La suite $(u_n)_n$ étant dans le compact A, on en extrait une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers $\overline{u} \in A$. Comme f est continue sur A, $f(u_{n_k}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(\overline{u})$. Par conséquent :

$$\begin{array}{ccccc} M - \dfrac{1}{n_k} & < & f(u_{n_k}) & \leq & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & & f(\overline{u}) & & M \end{array} \quad \text{quand } k \to +\infty$$

Démonstration mutatis mutandis pour l'existence de $\underline{u} \in A$ tel que $f(\underline{u}) = \mu$.

■

Il a été vu en 1[er] cycle que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ était continue sur $[a, b]$, elle y était uniformément continue. Le théorème qui suit est une généralisation de ce résultat au cadre de travail qui est le nôtre dans ce paragraphe.

Théorème 4.4.3. *(*H.E.Heine[6]*)*
Soit A une partie compacte de E, soit $f : A \subset E \to F$ continue sur A. Alors f y est uniformément continue.

Exercice 4.4.4. *Question : Où, dans le cadre des fonctions numériques de la variable réelle (en 1[er] cycle) ce théorème a-t-il servi ?*

Démonstration du Théorème 4.4.3.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A, v_n \in A : d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}$ et $\delta(f(u_n), f(v_n)) \geq \varepsilon_0$ (on est d'accord... ou je parle chinois ?).
De la suite $(u_n)_n$ qui vit dans le compact A on extrait une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers $\hat{u} \in A$. Quant à la suite $(v_{n_k})_k$, elle tend aussi vers $\hat{u}$ car :

$$d(\hat{u}, v_{n_k}) \leq d(\hat{u}, u_{n_k}) + d(u_{n_k}, v_{n_k}) \leq d(\hat{u}, u_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \to 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

A présent, f étant continue en $\hat{u}$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\big(d(w, \hat{u}) \leq \alpha\big) \Rightarrow \left(\delta(f(w), f(\hat{u})) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}\right) \text{ (par exemple).}$$

6. Mathématicien allemand (1821-1881) dont les travaux ont porté sur la théorie des fonctions, les séries de Fourier, la topologie et la (dite) théorie du potentiel.

Ainsi, pour k assez grand,

$$d(u_{n_k}, \hat{u}) \leq \alpha \text{ et } d(v_{n_k}, \hat{u}) \leq \alpha,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}(\varepsilon_0 \leq)\ \delta(f(u_{n_k}), f(v_{n_k})) &\leq \delta(f(u_{n_k}), f(\hat{u})) + \delta(f(v_{n_k}), f(\hat{u})) \\ &\leq 2\left(\frac{\varepsilon_0}{3}\right).\end{aligned}$$

D'où une contradiction.

■

4.5 Prolongement d'applications continues.

A passer en première lecture car hors programme.
Les deux théorèmes de prolongement qui suivent sont donnés sans démonstration ; on demande simplement de bien comprendre et retenir leur cadres de fonctionnement.

Théorème 4.5.1. *Prolongement par densité d'applications uniformément continues.*
Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On suppose :

1. *(F, δ) est **complet** ;*
2. *A est **partout dense** dans E (i.e. $\overline{A} = E$) ;*
3. *f est **uniformément continue** sur A.*

Alors il existe une application unique $\hat{f} : E \to F$ uniformément continue sur E et prolongeant f (i.e. telle que $\hat{f}_{|A} = f$).

Vérifier sur des exemples simples (fonctions numériques de la variable réelle) que les conclusions du Théorème 4.5.1. tombent en défaut si
• f est supposée seulement continue sur A ;
• si F (espace d'arrivée) n'est pas complet.

Théorème 4.5.2. *Prolongement par densité d'applications linéaires continues.*
*Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n. sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), soit V un **sous-espace vectoriel** de E, soit $A : V \to F$. On suppose :*

1. *$(F, \|.\|_F)$ est **complet** (espace de* BANACH, *donc) ;*
2. *V est **partout dense** dans E ;*
3. *$A \in \mathcal{L}(V, F)$ (A est linéaire continue de V dans F).*

Alors il existe $\hat{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ unique prolongeant A (i.e. telle que $\hat{A}_{|V} = A$), et on a :

$$|||\hat{A}|||_{\mathcal{L}(E,F)} = |||A|||_{\mathcal{L}(V,F)}.$$

Cas particulier des formes linéaires (très fréquent dans l'utilisation du théorème) : si $\varphi \in V'$, il existe $\overset{\wedge}{\varphi} \in E'$ unique prolongeant φ, et $\|\overset{\wedge}{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_V$.

Ces techniques de prolongement sont utiles dans des procédés **constructifs** : on sait définir $f(u)$ lorsque u est un objet "simple" (symbolisé par "$u \in A$") et on voudrait définir $f(v)$ pour des objets v (bien) plus compliqués que u (ceux de E) ; on peut le faire pourvu que :
• v puisse être approché par les objets "simples" de A ($\overline{A} = E$) ;
• f n'est pas trop "chahutée" sur A (unif. continuité sur A).

Parfois les prolongements sont plus simples à obtenir ; revoir l'Exercice 1.1.2.9 (page 7, Chapitre 1) par exemple pour les prolongements lipschitziens.

Chapitre 5

Deux grands résultats et techniques d'analyse appliquée : Point fixe des applications contractantes. Méthode des approximations successives. Projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien.

"L'idée que les mathématiques devraient se faire "sans calculs", si elle est vraie dans certains domaines, est en fait souvent mise en défaut. Ce qu'il faut supprimer, ce sont les calculs inutiles - mais pas les autres !"

R. Godement

5.1 Point fixe d'une application contractante. Méthode des approximations successives.

Il a été vu en 1^{er} cycle des énoncés de théorèmes et des exercices sur l'existence et l'approximation (de manière itérative) de points fixes de fonctions numériques f de la variable réelle x ($\hat{x}$ est appelé point fixe de f lorsque $f(\hat{x}) = \hat{x}$). La 1^{ere} partie de ce chapitre contient un seul grand résultat, mais il est fondamental tant par son énoncé que par sa démonstration. C'est une condition simple d'**existence** d'un point fixe, point obtenu par une méthode constructive appelée **méthode des approximations successives**[1].

Soit $f : S \to S$ (ensemble d'arrivée = ensemble de départ). On appelle <u>point fixe</u> de f tout point $\hat{u}$ de S tel que $f(\hat{u}) = \hat{u}$.

5.1.1 Le résultat de base.

Théorème 5.1.1. *<u>Fon-da-men-tal</u>!* ***Point fixe d'une contraction.***
Soit (E, d) un espace métrique ***complet****, soit $S \subset E$ une partie* ***fermée*** *de E et soit $f : S \to E$ une application vérifiant :*

1. *$f(S) \subset S$;*
2. *f est une* ***contraction*** *(ou est* ***contractante****) sur S, c'est-à-dire : il existe un réel positif $k < 1$ tel que*

$$d[f(u), f(v)] \leq k d(u, v) \text{ pour tout } u, v \text{ dans } S.$$

Alors :

1. *<u>Existence et unicité d'un point fixe</u> : il existe un et un seul $\hat{u} \in S$ tel que $f(\hat{u}) = \hat{u}$;*
2. *<u>Algorithme de calcul</u> : la suite $(u_n)_n$ des points de S construite de la manière suivante*

$$(\star)\ u_0 \in S,\ u_{n+1} := f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est convergente et de limite $\hat{u}$.

3. *<u>Estimation de la distance de l'itéré u_n au point fixe $\hat{u}$</u> :*

$$(\star\star)\ d(u_n, \hat{u}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, f(u_0)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ; en particulier}$$

$$(\star\star\star)\ d(u_0, \hat{u}) \leq \frac{1}{1-k} d(u_0, f(u_0)).$$

Bien noter :
$k < 1$ (et non $k \leq 1$, ce qui ne ferait pas l'affaire) ;
u_0 (point de départ) est quelconque dans S ;
$(\star\star)$ donne une estimation a priori de $d(u_n, \hat{u})$ en fonction de k et des deux itérés u_0 et $u_1 = f(u_0)$.

1. ou méthode de Banach et Picard. Emile Picard, mathématicien français (1856-1941) ; fut Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse de 1879 à 1881.

Démonstration

Etape 1. Tout d'abord, si un point fixe $\hat{u}$ existe, alors **il est unique**.
En effet, si $\hat{u}$ et $\hat{v}$ étaient deux points fixes, on aurait

$$d(\hat{u},\hat{v}) = d[f(\hat{u}),f(\hat{v})] \leq kd(\hat{u},\hat{v}),$$

d'où

$$(1-k)d(\hat{u},\hat{v}) \leq 0.$$

Puisque $1-k>0$, cela induit que $d(\hat{u},\hat{v}) \leq 0$, soit $\hat{u} = \hat{v}$.

Etape 2. $(u_n)_n$ **est une suite de CAUCHY de** S.
Par construction même, puisque $u_0 \in S$ et que $f(S) \subset S$, $u_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On prétend que

$$(\star\star\star\star)\ d(u_{n+1},u_n) \leq k^n d(u_0,f(u_0)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La démonstration se fait aisément par récurrence sur n. Nous la faisons rapidement.
$(\star\star\star\star)$ est assurée pour $n=0$ (puisque $k^0=1$ et que $u_1=f(u_0)$).
Supposons $(\star\star\star\star)$ vraie à l'ordre n et démontrons-là à l'ordre $n+1$.
On a :

$$\begin{array}{rcll} d(u_{n+2},u_{n+1}) & = & d[f(u_{n+1}),f(u_n)] & \text{(d'après } (\star)) \\ & \leq & kd(u_{n+1},u_n) & \text{(propriété de contraction de } f) \\ & \leq & k.k^n d(u_0,f(u_0)) & \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ & \leq & k^{n+1}d(u_0,f(u_0)), & \end{array}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.
A présent on utilise à répétition l'inégalité triangulaire : Pour tout entier $p \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} d(u_{n+p},u_n) & \leq & d(u_{n+p},u_{n+p-1}) + \ldots + d(u_{n+1},u_n) \\ d(u_{n+p},u_n) & \leq & k^{n+p-1}d(u_0,f(u_0)) + \ldots + k^n d(u_0,f(u_0)) \text{ [d'après } (\star\star\star\star)] \\ d(u_{n+p},u_n) & \leq & k^n d(u_0,f(u_0))(1+k+\ldots+k^{p-1}) \\ (\star\star\star\star\star)\ d(u_{n+p},u_n) & \leq & k^n d(u_0,f(u_0))\left(\dfrac{1-k^p}{1-k}\right) \leq k^n d(u_0,f(u_0))\dfrac{1}{1-k}. \end{array}$$

Puisque $k^n d(u_0,f(u_0))\dfrac{1}{1-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (on est d'accord ?), on a bien démontré que :
$\forall\varepsilon>0, \exists n(\varepsilon)$ tel que $d(u_{n+p},u_n) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n(\varepsilon)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_n)_n$ est bien une suite de CAUCHY de S.

Etape 3. $(u_n)_n$ **est convergente et de limite le point fixe de** f.
S est une partie fermée de l'espace complet E, elle est donc complète (*cf.* Théorème 3.3.0.4 du Chapitre 3).
La suite $(u_n)_n$ est donc convergente de limite $\hat{u} \in S$.
Reste à démontrer que $\hat{u}$ est effectivement un point fixe de f.
On a par définition même de la suite $(u_n)_n$:

$$f(u_n) = u_{n+1} \text{ pour tout } n.$$

Du fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \hat{u}$, on tire :

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \hat{u} \text{ et } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\hat{u}) \text{ [car } f \text{ est continue !] ;}$$

d'où $f(\hat{u}) = \hat{u}$.

Etape 4. **Majoration de** $d(u_n, \hat{u})$.
Dans $(\star\star\star\star\star)$, n étant fixé on fait tendre p vers $+\infty$ (en gardant n fixé) :
$u_{n+p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \hat{u}$, $d(., u_n)$ est continue ; d'où la majoration annoncée.

■

Exercice 5.1.2. *(du 1*[er] *cycle).*
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue (et rien d'autre !). Montrer que f a un point fixe au moins.

Exercice 5.1.3. *(du 1*[er] *cycle).*
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (tiens... ça rappelle les hypothèses d'un théorème... de quoi déjà ?). Prouver que f est une contraction sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\sup_{t\in]a,b[} |f'(t)| < 1.$$

Exercice 5.1.4. *Soit K un compact de (E, d), soit $f : K \to K$ vérifiant :*

$$d[f(u), f(v)] < d(u, v) \text{ pour tout } u \neq v \text{ dans } K.$$

(noter que c'est bien moins qu'une hypothèse de contraction sur f !).
Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Ind. *L'hypothèse (exigente) de compacité de K est essentielle ici ; penser à utiliser la fonction $\theta := d(u, f(u))$.*

5.1.2 Variantes.

Une première variante du résultat de base (Théorème 5.1.1) est comme suit.

Théorème 5.1.5. *Soit (E, d) un espace métrique* ***complet****, soit $B(u_0, r)$ (boule ouverte de E, de rayon $r > 0$), soit $f : B(u_0, r) \to E$ une* ***contraction*** *sur $B(u_0, r)$ de constante (de contraction) k (< 1, rappelons le).*
*Sous l'****hypothèse*** *$d[f(u_0), u_0] \leq \dfrac{r}{1-k}$, il existe un unique point fixe $\hat{u} \in B(u_0, r)$ de f.*

Démonstration

Selon les mêmes techniques que celles utilisées pour démontrer le Théorème 5.1.1 :
- on définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_{n+1} := f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- on démontre que $u_n \in B(u_0, r)$ pour tout n ;
- on vérifie que $(u_n)_n$ est de CAUCHY et que sa limite $\hat{u}$ est bien dans $B(u_0, r)$;
- on démontre que $\hat{u}$ est l'unique point fixe de f.

■

Il peut arriver que f ne soit pas une contraction mais qu'un de ses itérés f^p $(:= f \circ f \circ ... \circ f$, p fois) le soit. Si $f : S \to E$ est une contraction de constante (de contraction) k, alors il est aisé d'en déduire pour f^p :

$$(\heartsuit)\ d[f^p(u), f^p(v)] < k^p d(u,v) \text{ pour tout } u, v \text{ dans } S.$$

Toutefois, requérir $(\heartsuit)$ sur f pour un certain p est moins que demander que f soit une contraction [même si cela ne se voit pas à l'œil nu].

Théorème 5.1.6. *Soit (E,d) un espace métrique* ***complet****, soit S une partie* ***fermée*** *de E et soit $f : S \to E$ une application vérifiant :*

1. *$f(S) \subset S$;*
2. *Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit une contraction sur S.*

Alors f possède un point fixe et un seul (celui de f^p).

Démonstration

La fonction $g := f^p$ vérifie les hypothèses du Théorème 5.1.1 ; donc g admet un point fixe et un seul.
Si $\hat{u}$ est un point fixe de f, de $f(\hat{u}) = \hat{u}$ il vient $f^2(\hat{u}) = f(\hat{u}) = \hat{u}$; on continue jusqu'à avoir $f^p(\hat{u}) = \hat{u}$, de sorte que $\hat{u}$ est un point fixe de g. Voilà donc déjà le caractère d'unicité d'un point fixe de f.
Soit à présent $\hat{u}$ point fixe de g ; de $f^p(\hat{u}) = \hat{u}$ on déduit

$$f^{p+1}(\hat{u}) = \begin{array}{l} \nearrow\ f^p[f(\hat{u})] \\ \searrow\ f[f^p(\hat{u})] = f(\hat{u}), \text{ d'où } f^p[f(\hat{u})] = f(\hat{u}). \end{array}$$

Donc $f(\hat{u})$ est aussi un point fixe de $f^p (= g)$. Comme g n'a qu'un seul point fixe, il s'ensuit que $f(\hat{u}) = \hat{u}$.

■

5.1.3 Exemples d'applications.

Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

(situation qui sera reprise et développée dans un cours du second semestre).

Théorème 5.1.7. *Soit* $\begin{array}{rccc} \theta & : & [t_0, t_1] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (t,u) & \mapsto & \theta(t,u) \end{array}$
une application ***continue*** *(des deux variables t et u !) vérifiant l'hypothèse dite de* ***Lipschitz par rapport à la seconde variable*** *: Il existe $L \geq 0$ tel que*

$$(\heartsuit\heartsuit) \begin{cases} \forall t \in [t_0, t_1], \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ |\theta(t,u) - \theta(t,v)| \leq L|u - v|. \end{cases}$$

Alors l'équation différentielle avec condition particulière en t_0 (appelée aussi ***problème de* Cauchy***, encore lui !) que voici*

$$(\mathcal{C})\begin{cases} x'(t) &= \theta(t,x(t)) \text{ pour } t \in [t_0,t_1] \\ x(t_0) &= x_0 \ (\in \mathbb{R}) \end{cases}$$

admet <u>*une et une seule solution*</u> $x : t \in [t_0, t_1] \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$.

Démonstration

On commence par observer que $t \mapsto \hat{x}(t)$ est solution de $(\mathcal{C})$ si et seulement si

$$(\heartsuit\heartsuit\heartsuit)\ \hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau, \hat{x}(\tau))d\tau,\ t \in [t_0, t_1].$$

Ensuite on considère $E := \mathcal{C}([t_0,t_1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et l'application $f : E \to E$ définie par

$$x \in E \mapsto \big(f(x) : t \mapsto [f(x)](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau, x(\tau))d\tau\big).$$

f est bien à valeurs dans E (c'est facile à vérifier) et, pour p assez grand, f^p est une contraction sur E. En effet, on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que :

$$|f^p(x)(t) - f^p(y)(t)| \leq \frac{(t-t_0)^p}{p!} L^p \|x - y\|_\infty.$$

Ainsi, en choisissant p de sorte que $\dfrac{(t_1-t_0)^p}{p!} L^p \leq \dfrac{1}{2}$ (par exemple), on obtient

$$\|f^p(x) - f^p(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_\infty.$$

Il existe donc un et un seul point fixe de f sur E. Or, être un point fixe de f, c'est exactement vérifier $(\heartsuit\heartsuit\heartsuit)$, c'est-à-dire être solution de $(\mathcal{C})$.

$\blacksquare$

Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale.

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (des deux variables) une fonction appelée noyau (comme dans le Chapitre 4, Exemple 4.3.2.6), soit enfin $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le problème qu'on se propose de résoudre est le suivant :

$$(\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit)\begin{cases} \text{Trouver} \quad u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue telle que} \\ \qquad\qquad u(t) = \lambda \displaystyle\int_a^b K(t,s)u(s)ds + \varphi(t) \text{ pour tout } t \in [a,b]. \end{cases}$$

Ce type de problème (issu de la Physique) est appelée **équation intégrale** (on comprend pourquoi) : comme dans $(\heartsuit\heartsuit\heartsuit)$, le u cherché est à gauche et sous le signe intégrale à droite dans l'équation de $(\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit)$.
Considérons $E := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et soit $A : E \to E$ définie par

$$u \in E \mapsto \left(A(u) : t \mapsto [A(u)](t) := \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds + \varphi(t)\right).$$

Des majorations pas du tout difficiles conduisent à :

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty \leq |\lambda| M(b-a) \|u - v\|_\infty,$$

où M désigne : $\max_{(t,s)\in[a,b]^2} |K(t,s)|$.

En conséquence : Si $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, **on est assuré que le problème posé en (♡♡♡♡) a une et une seule solution** (on est d'accord ?).

La méthode itérative dite des approximations successives prend ici la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&u_0 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \text{ quelconque;}\\
&\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} : t \mapsto u_{n+1}(t) := \lambda \int_a^b K(t,s) u_n(s) ds + \varphi(t).
\end{aligned}$$

La suite $(u_n) \subset E$ ainsi définie converge (au sens de $\|.\|_\infty$) vers la solution de (♡♡♡♡).

Exercice 5.1.8. *L'opérateur de primitivation.*
Soit $E := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ structuré en e.v.n. grâce à $\|.\|_\infty$. On définit $A : E \to E$ de la manière suivante :

$$u \in E \mapsto \left(A(u) : t \mapsto [A(u)](t) := \int_a^t u(\tau) d\tau \right).$$

On a déjà vu que $A \in \mathcal{L}(E)$ et même envisagé de calculer $|||A|||$ (Chapitre 4, Exercice 4.3.2.3).

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$A^n(u) : t \mapsto [A^n(u)](t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} u(\tau) d\tau.$$

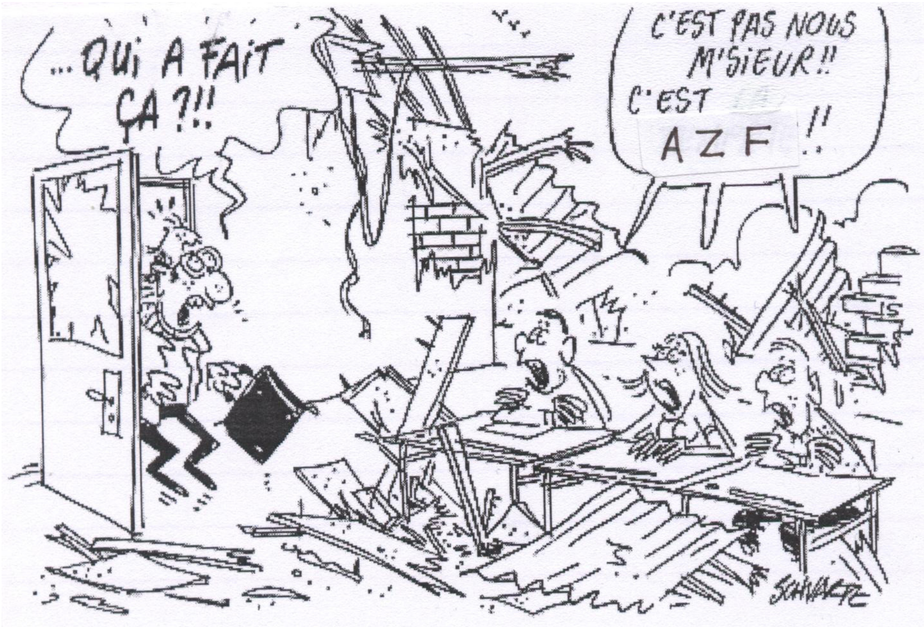
   [Autrement dit -et c'est fort intéressant- on donne une expression explicite de la primitive n^{eme} de u dont les dérivées d'ordre 1, 2,..., $n-1$ s'annulent en a].

2. *Montrer que $|||A^n||| = \dfrac{(b-a)^n}{n!}$. En déduire que A^n est une contraction pour n assez grand.*
   Conclusion ?

Exercice 5.1.9. *Résoudre l'équation intégrale suivante dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$:*

$$f(t) = \int_0^t f(s) ds + \sin t,\ \ t \in [0,1].$$

$\left(\textbf{\textit{Réponse}}.\ f(t) = \sin t + \int_0^t e^{t-s} \sin s ds.\right)$


...QUI A FAIT ÇA ?!!
C'EST PAS NOUS M'SIEUR !! C'EST AZF !!
SCHVARTZ

5.2 Projection sur un convexe complet d'un espace pré-hilbertien.

5.2.1

On considère dans ce sous-paragraphe le contexte suivant :
$(\mathcal{H})$

$(H, < .,. >)$ est un **espace préhilbertien** réel et $C \neq \emptyset$ est une partie **convexe** et **complète** de H. [2]

Les réalisations les plus fréquentes de ces hypothèses sont les suivantes :
- $(H, < .,. >)$ est un **espace de Hilbert** réel et $C \neq \emptyset$ est une partie **convexe** et **fermée** de H.
- $(H, < .,. >)$ est un espace préhilbertien réel et $C \neq \emptyset$ est une partie **convexe fermée contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie** de H (par exemple, C est un sous-espace vectoriel de dimension finie).

Pour tout $u \in H$ on note $\mathbb{P}_C(u) := \{v \in C : \|u - v\| = d_C(u)\}$.
A priori, $\mathbb{P}_C(u)$ peut être vide, peut contenir plusieurs points, etc. Le mieux pour voir cela est de faire quelques essais dans le plan (et les dessins qui vont avec).

Théorème 5.2.1. *Fon-da-men-tal! **Projection sur un convexe**.*
Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$ indiquée plus haut :

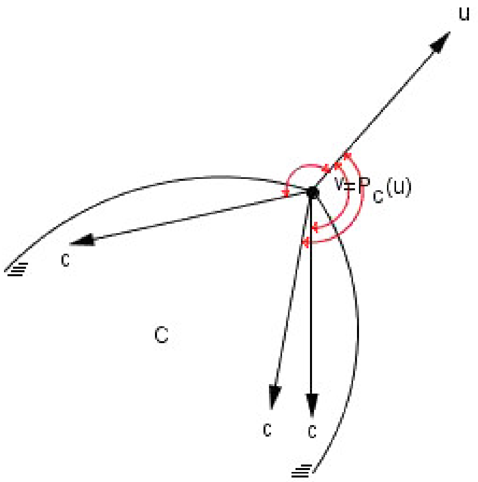
1. *Existence et unicité. Pour tout $u \in H$, $\mathbb{P}_C(u)$ **contient un et un seul élément** (on notera désormais $P_C(u)$ l'unique élément de $\mathbb{P}_C(u)$).*
2. *Caractérisation variationnelle de $P_C(u)$.*
   $(\Diamond)$ $(v = P_C(u)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \in C \text{ et} \\ < u - v, c - v > \leq 0 \text{ pour tout } c \in C \end{pmatrix}$.
3. *Deux propriétés essentielles de l'application P_C : Pour tout u, u' de H,*
   $(\Diamond\Diamond)$ $< P_C(u) - P_C(u'), u - u' > \geq 0$ *["Monotonie" de P_C] ;*

   $(\Diamond\Diamond\Diamond)$ $\|P_C(u) - P_C(u')\| \leq \|u - u'\|$ *[Propriété de Lipschitz sur H, de constante 1].*

L'assertion de droite dans $(\Diamond)$ est une **inéquation variationnelle** caractérisant l'élément $P_C(u)$; elle est aussi utile - sinon plus - que la définition originelle de $P_C(u)$.
La meilleure façon de retenir $(\Diamond)$ est de garder en tête le dessin que voici :

2. On rappelle que C est convexe lorsque :

$$(u \in C,\ v \in C \text{ et } \lambda \in [0,1]) \Rightarrow (\lambda u + (1-\lambda)v \in C).$$



"L'angle $(\overrightarrow{vu}, \overrightarrow{vc})$ est toujours obtus"

Dans le cas particulier où C est un **sous-espace vectoriel** (ou même un sous-espace affine) **complet** de H (par exemple lorsque C est un sous-espace **fermé** d'un espace de **Hilbert** H, ou lorsque C est de dimension finie), l'inéquation de caractérisation de $P_C(u)$ devient une équation :

- C s.-e.vectoriel

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)\ (v = P_C(u)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \in C \text{ et} \\ < u - v, c >= 0 \text{ pour tout } c \in C \end{pmatrix}.$$

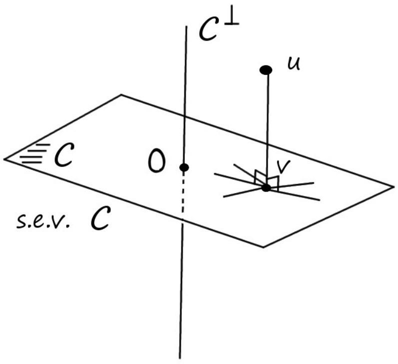
$[P_C(u)$ est l'unique point v de C tel que $u - v \in C^{\perp}]$

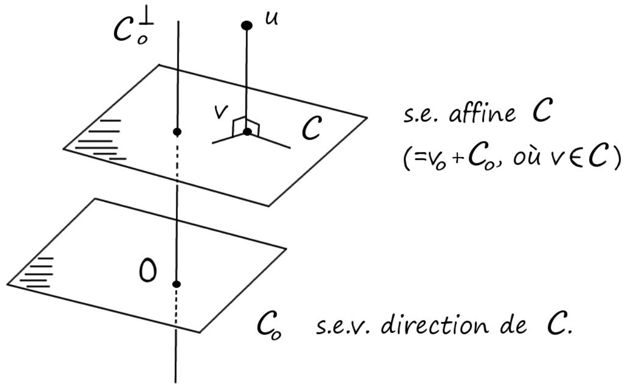
.

- C s.-e. affine

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)\ (v = P_C(u)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v \in C \text{ et} \\ < u - v, c - v >= 0 \text{ pour tout } c \in C \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (v \in C \text{ et } u - v \in C_0^{\perp}), \text{ où } C_0 \text{ est le s-e.v. "direction" de } C.$$





Exercice 5.2.2. *A l'aide de la caractérisation* $(\diamondsuit)$ *et des propriétés particulières d'un sous-espace vectoriel (resp. d'un sous-espace affine), démontrer les caractérisations* $(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$ *et* $(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$*.*

Démonstration du Théorème 5.2.1.

Etape 1. **Mise en évidence d'une suite de CAUCHY de** C.
Puisque $d_C(u) := \inf\{\|u-a\| : a \in C\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in C$ tel que

$$(\blacktriangle)\ d_C(u) \leq \|u - a_n\| \leq d_C(u) + \frac{1}{n}$$

(non non... on n'est pas assuré de l'existence de $\overline{a} \in C$ tel que $\|u - \overline{a}\| = d_C(u)$... sauf si H est de dimension finie (pourquoi cela ?)). Grâce à l'identité de la médiane valable dans un espace préhilbertien (voir Chapitre 1, paragraphe 1.3.1), on a :

$$4\|u - \frac{a_n + a_m}{2}\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 = 2[\|a_n - u\|^2 + \|a_m - u\|^2].$$

Comme a_n et a_m sont dans C et que C est convexe, $\frac{a_n + a_m}{2}$ est aussi dans C. Donc

$$\|u - \frac{a_n + a_m}{2}\| \geq d_C(u) \text{ [par définition même de } d_C(u)],$$

d'où

$$(\blacktriangle\blacktriangle)\ \|a_n - a_m\|^2 \leq 2[\|a_n - u\|^2 + \|a_m - u\|^2] - 4d_C^2(u).$$

Comme la suite $(\|a_n - u\|)_n$ converge vers $d_C(u)$ quand $n \to +\infty$ (*cf.* $(\blacktriangle)$), pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un rang $N(\varepsilon)$ tel que

$$\begin{pmatrix} n \geq N(\varepsilon) \\ m \geq N(\varepsilon) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \|a_n - u\| \leq d_C(u) + \varepsilon \\ \|a_m - u\| \leq d_C(u) + \varepsilon \end{pmatrix},$$

de sorte que, via $(\blacktriangle\blacktriangle)$,

$$\begin{pmatrix} n \geq N(\varepsilon) \\ m \geq N(\varepsilon) \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\|a_n - a_m\|^2 \leq 4(2d_C(u) + \varepsilon)\varepsilon\right).$$

La suite $(a_n)_n$ est donc une suite de CAUCHY de C.

Etape 2. **Existence d'un élément de** $\mathbb{P}_C(u)$ ($i.e.$ $\mathbb{P}_C(u)$ n'est pas vide).
La suite $(a_n)_n \subset C$ est convergente vers un élément $\overline{a}$ de C (c'est ici que le caractère complet de C intervient). Alors :

$$\|a_n - u\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|\overline{a} - u\| \text{ (d'accord ?)},$$

et comme $\|a_n - u\| \to d_C(u)$ (*cf.* $(\blacktriangle)$), on a en définitive : $\|\overline{a} - u\| = d_C(u)$, soit encore $\overline{a} \in \mathbb{P}_C(u)$.

Etape 3. $\mathbb{P}_C(u)$ **est un singleton**.
Soit v et w dans $\mathbb{P}_C(u)$ supposés différents et montrons que cela conduit à une contradiction.
Par définition de $d_C(u)$ (ou de $\mathbb{P}_C(u)$) :

$$\|u - v\| = d_C(u) \text{ et } \|u - w\| = d_C(u).$$

Considérons le point milieu $\frac{v+w}{2}$ du segment joignant v à w. Puisque C convexe, $\frac{v+w}{2}$ est encore dans C. Par suite :

$$d_C(u) \leq \|u - \frac{v+w}{2}\| = \|\frac{u-v}{2} + \frac{u-w}{2}\| \leq \frac{d_C(u)}{2} + \frac{d_C(u)}{2} = d_C(u),$$

d'où $\|u - \frac{v+w}{2}\| = d_C(u)$.
Ceci est impossible car la sphère $S(u, d_C(u))$ est "bien ronde" ; explicitons ce que nous voulons dire. L'identité du parallèlogramme dans un espace préhilbertien (*cf.* Chapitre 1, paragraphe 1.3.1) conduit ici à :

$$\begin{gathered}\|2u - (v+w)\|^2 + \|v-w\|^2 = 2[\|u-v\|^2 + \|u-w\|^2],\\ 4d_C^2(u) + \|v-w\|^2 = 2[d_C^2(u) + d_C^2(u)] = 4d_C^2(u),\end{gathered}$$

ce qui est intenable lorsque $\|v - w\| > 0$, comme cela à été supposé au début de cette étape de démonstration.

Etape 4. **Caractérisation variationnelle de l'élément** $P_C(u)$.
Supposons $v = P_C(u)$, *i.e.* $v \in C$ et vérifie : $\|u - v\| \leq \|u - a\|$ pour tout $a \in C$.
Prenons $a \in C$ arbitraire ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$. L'élément $\frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})v = v + \frac{1}{n}(a - v)$ est encore dans C puisque C est convexe. Par conséquent :

$$\|u-v\|^2 \leq \|u - \big(\frac{1}{n}a + (1-\frac{1}{n})v\big)\|^2,$$

ce qui implique

$$\|u-v\|^2 \leq \|u-v\|^2 - \frac{2}{n} < u-v, a-v > + \frac{1}{n^2}\|a-v\|^2.$$

D'où

$$< u-v, a-v > \leq \frac{1}{2n}\|a-v\|^2,$$

et, en faisant $n \to +\infty$, on obtient bien $< u-v, a-v > \leq 0$.
Réciproquement, supposons qu'on ait :

$$v \in C \text{ et } < u-v, a-v > \leq 0 \text{ pour tout } a \in C.$$

En écrivant $a - v$ sous la forme $a - u + u - v$, on déduit de ce qui précède :$< u-v, a-u > + \|u-v\|^2 \leq 0$, et donc

$$\|u-v\|^2 \leq < u-v, u-a > .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$(\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle)\ \|u-v\|^2 \leq \|u-v\|.\|u-a\|.$$

Si $u - v = 0$, *i.e.* $v = u$, c'est que $u \in C$ et il y a plus rien à démontrer. Si $u - v \neq 0$, on déduit de ($\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$) :

$$\|u-v\| \leq \|u-a\|.$$

On a bien démontré que $v = P_C(u)$.

Etape 5. **Propriétés essentielles de l'application P_C.**
D'après la caractérisation variationnelle de $P_C(u)$ et $P_C(u')$, on a :

$$\forall a \in C : \quad \begin{array}{l} < u - P_C(u), a - P_C(u) > \leq 0 \\ < u' - P_C(u'), a - P_C(u') > \leq 0. \end{array}$$

Faisons $a = P_C(u')$ dans la première de ces deux inégalités, et $a = P_C(u)$ dans la seconde. Il s'ensuit, après addition des inégalités obtenues,

$$\boxed{(\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle) \ \|P_C(u) - P_C(u')\|^2 \leq < P_C(u) - P_C(u'), u - u' > .}$$

Alors, $(\diamondsuit\diamondsuit)$ vient trivialement, et $(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$ résulte d'une nouvelle application de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

■

On a donc défini une application $P_C : H \to C \subset H$, dite application (ou opérateur) de projection, qui a des propriétés fort séduisantes, notamment $(\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle)$ dont sont tirées $(\diamondsuit\diamondsuit)$ et $(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$. Mais attention ! P_C n'est pas une contraction (why ?).

Exercice 5.2.3. *Déterminer P_C dans les cas simples suivants :*
- $C = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *; on tracera le graphe de P_C et observera la "monotonie" (propriété $(\diamondsuit\diamondsuit)$), c'est-à-dire ici la croissance, de P_C.*
- $C = \mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, ..., x_n) : x_i \geq 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{R}^n$ *(appelé souvent l'orthant positif de $\mathbb{R}^n$).*
- $C = \overline{B}(0, r)$ *d'un espace de Hilbert H.*

Exercice 5.2.4. *Démontrer (et illustrer géométriquement) la nouvelle caractérisation variationnelle de $P_C(u)$ que voici :*

$$\big(v = P_C(u)\big) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \in C \ \textit{et} \\ < u - c, c - v > \leq 0 \ \textit{pour tout } c \in C. \end{pmatrix}$$

Exercice 5.2.5. *Intéressant et utile.* ***Projection et distance à un hyperplan fermé.***
- *Soit V_0 un hyperplan fermé de l'espace de Hilbert $(H, < ., . >)$.*
  V_0 peut s'écrire sous la forme suivante :

  $$V_0 = \{x \in H : \varphi(x) = 0\},$$

  où φ est une forme linéaire continue $\not\equiv 0$ sur H. Comme cela a déjà été vu en 1[er] *cycle lorsque H est de dimension finie, et comme cela sera vu au Chapitre 7 dans le cas général, il existe $c \in H$ unique tel que $\varphi =< c, . >$ (i.e., $\varphi(u) =< c, u >$ pour tout $u \in H$).*
  Montrer alors que pour tout $u \in H$:

$$\boxed{\begin{aligned} d_{V_0}(u) &= \frac{| < c, u > |}{\|c\|} \, ; \\ P_{V_0}(u) &= u - \frac{< c, u >}{\|c\|^2} c. \end{aligned}}$$

- *Etendre les résultats ci-dessus au cas où V_r est un hyperplan affine fermé de H, c'est-à-dire lorsque*
$$V_r = \{x \in H :< c, x >= r\},\ r \in \mathbb{R}$$
(V_r est alors "dirigé" par l'hyperplan vectoriel fermé V_0 d'équation $< c, x >= 0$).

Exercice 5.2.6. ***Une hypothèse vous manque... and everything breaks down.*** *Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On considère*

$$\begin{aligned} C := \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \ & f \text{ est croissante sur } [0,1], \\ & f \geq 0 \text{ sur } [0,1],\ 1 \leq f(0) \leq 2, \\ & \int_0^1 f(t)dt + 1 - f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

- *Montrer que C est une partie (non vide) convexe, complète, et même bornée de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.*
- *Démontrer que $d_C(0) = 0$ et que $\mathbb{P}_C(0) = \emptyset$.*
  Quelle est l'hypothèse du Théorème 5.2.1. qui fait défaut ?

5.2.2 Propriétés additionnelles lorsqu'on projette sur un sous-espace vectoriel.

Le contexte dans ce sous-paragraphe est le suivant :
$(\mathcal{H})'$

$(H, < .,. >)$ est un **espace préhilbertien réel** et $V \neq \emptyset$ est un **sous-espace vectoriel complet** de H.

Exemples de telles situations (déjà dites au début du paragraphe 5.2.1) :
- $(\mathcal{H})''$: $(H, < .,. >)$ est un **espace de Hilbert** et V est un **sous-espace vectoriel fermé** de H.
- V est un **sous-espace vectoriel de dimension finie** de l'espace (seulement) préhilbertien H.

On a vu au Chapitre 1, définition 1.3.3.4, ce qu'était $A^\perp$, où A est une partie non vide de H. Nous allons à présent pouvoir en dire un peu plus sur la structure topologique de $A^\perp$.

Proposition 5.2.7.

1. *Si $0 \neq c \in H$, l'ensemble $\{c\}^\perp$, noté aussi $c^\perp$, est un* ***hyperplan fermé*** *de H.*
2. *Si A est une partie non vide de H, $A^\perp$ est un* ***sous-espace vectoriel (toujours) fermé*** *de H.*
3. *"Prendre l'orthogonal de" est une opération <u>insensible</u> à "la prise d'adhérence" ou à "la prise du sous-espace vectoriel engendré", c'est-à-dire :*
$$(\triangledown)\ A^\perp = (\overline{A})^\perp,\ A^\perp = (vect\ A)^\perp$$
(vect A ou lin A sont des notations pour signifier le sous-espace vectoriel engendré par A, c'est-à-dire le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant A).

Démonstration

1. $\{c\}^\perp$ est par définition $\{v \in H :< c, v >= 0\}$, c'est-à-dire le noyau de la forme linéaire continue $\varphi_c : v \mapsto \varphi_c(v) :=< c, v >$ (rappelons que $\varphi_c \in H'$, et même que $\|\varphi_c\|' = \|c\|$). Donc $\{c\}^\perp$ est bien un hyperplan fermé de H.
2. $A^\perp$ est par définition $\{v \in H :< a, v >= 0 \text{ pour tout } a \in A\}$, soit encore $\bigcap_{a\in A}\{v \in H :< a, v >= 0\}$. D'où le résultat annoncé, puisque l'intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels fermés est un sous-espace vectoriel fermé.
3. Puisque $A \subset \overline{A}$, on a au moins $(\overline{A})^\perp \subset A^\perp$ (is that clear ?). Soit à présent $u \in A^\perp$ et $\hat{a} \in \overline{A}$; $\hat{a} = \lim_{n\to+\infty} a_n$ avec $a_n \in A$ pour tout n, de sorte que $< u, a_n >= 0$ pour tout n ; la continuité de la forme linéaire $< u, . >$ fait qu'ensuite $< u, \hat{a} >= 0$; donc $u \in (\overline{A})^\perp$.
   Puisque $A \subset vect\ A$, on a $(vect\ A)^\perp \subset A^\perp$. Soit $u \in A^\perp$ et $\tilde{a} \in vect\ A$; $\tilde{a} = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$, avec I ensemble fini ; par suite
   $$< u, \tilde{a} >= \sum_{i\in I} \lambda_i < u, a_i >= 0 \text{ car } < u, a_i >= 0 \text{ pour tout } i\,;$$
   donc $u \in (vect\ A)^\perp$.

■

Théorème 5.2.8. ***Fon-da-men-tal !***
Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}')$ *indiquée plus haut (avec* $V \neq \{0\}$ *pour éviter des trivialités) :*

(i) L'application de projection $P_V : H \to V \subset H$ *est* ***linéaire continue****, avec* $|||P_V||| = 1$.

(ii) $Im\ P_V = V$, $\ker P_V = V^\perp$, $H = V \oplus V^\perp$.

(iii) $V^{\perp\perp}$ *(*$=: (V^\perp)^\perp$*) n'est autre de* V.

Sous l'hypothèse un peu plus précise $(\mathcal{H})''$ *indiquée plus haut, à savoir que* V *est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert* H *(avec* $V \neq \{0\}$ *pour éviter des trivialités) :*

(j) L'application de projection $P_{V^\perp}$ *(licite ici!) n'est autre que* $id_H - P_V$*, i.e. :*

$$(\nabla\nabla)\ P_{V^\perp}(u) = u - P_V(u) \text{ pour tout } u \in H.$$

(jj)

$$(\nabla\nabla\nabla)\ \|u\|^2 = \|P_V(u)\|^2 + \|P_{V^\perp}(u)\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

(jjj)

$$(\nabla\nabla\nabla\nabla)\ < P_V(u), v >=< u, P_V(u) > \text{ pour tout } u \in H.$$

Non, $V^\perp$ n'est pas nécessairement complet lorsque V est complet ; mais lorsque V est fermé dans l'espace de Hilbert H, $V^\perp$ est à son tour fermé dans H, donc complet... Ceci explique le léger distinguo dans les deux parties du théorème.

Démonstration du Thórème 5.2.8.

(i) On a vu en ($\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$) (*cf.* ce qui vient après le Théorème 5.2.1) que :

$$(\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown) \ \big(\overline{u} = P_V(u)\big) \Leftrightarrow \big(\overline{u} \in V \text{ et } < u - \overline{u}, x >= 0 \text{ pour tout } x \in V\big)$$

[$\overline{u}$ est l'unique point v de V tel que $u - \overline{u} \in V^{\perp}$].

De $< u - P_V(u), x >= 0$
$< u' - P_V(u'), x >= 0$ pour tout $x \in V$,
il vient pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$< \lambda u + \mu u' - [\lambda P_V(u) + \mu P_V(u')], x >= 0 \text{ pour tout } x \in V.$$

On a donc trouvé un élément de V, à savoir $\overline{w} := \lambda P_V(u) + \mu P_V(u')$, tel que

$$< \lambda u + \mu u' - \overline{w}, x >= 0 \text{ pour tout } x \in V\,;$$

c'est donc $P_V(\lambda u + \mu u')$.

(i)' D'après le Théorème 5.2.1., pour tout $u \in H$,

$$\|P_V(u) - P_V(0)\| \leq \|u - 0\|,$$

soit $\|P_V(u)\| \leq \|u\|$ [car 0 étant dans V, $P_V(0) = 0$].
Ainsi P_V est continue et $|||P_V||| \leq 1$.
Mais l'inégalité $\|P_V(u)\| \leq |||P_V|||.\|u\|$, écrite pour un $u \neq 0$ de V (de sorte que $P_V(u) = u$) conduit à $1 \leq |||P_V|||$.
Donc $|||P_V|||$ est bien égal à 1.

(ii) $Im\ P_V = V$, c'est clair.
$u \in \ker P_V \Leftrightarrow P_V(u) = 0 \Leftrightarrow < u - 0, x >= 0$ pour tout $x \in V$ [(*cf.* ($\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown$))],
$\Leftrightarrow u \in V^{\perp}$.
$V \cap V^{\perp} = \{0\}$, c'est clair (du moins je l'espère). Soit $u \in H$; $u = P_V(u) + [u - P_V(u)]$; il ne nous reste plus qu'à vérifier que $u - P_V(u) \in V^{\perp}$. Or $< u - P_V(u), x >= 0$ pour tout $x \in V$ (*cf.* toujours ($\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown$)) ; ceci revient exactement à dire que $u - P_V(u) \in V^{\perp}$.
On a donc démontré que $H = V \oplus V^{\perp}$.

(iii) Soit $u \in V$ et $V \in V^{\perp}$; on a $< u, v >= 0$.
Donc : $(u \in V) \Rightarrow (< u, v >= 0$ pour tout $v \in V^{\perp})$, c'est-à-dire
$(u \in V) \Rightarrow (u \in (V^{\perp})^{\perp} := V^{\perp\perp})$.
Réciproquement, soit $u \in (V^{\perp})^{\perp}$. Comme $u - P_V(u) \in V^{\perp}$ (déjà vu un peu plus haut), $< u - P_V(u), u >= 0$. Par ailleurs, comme $u - P_V(u) \in V^{\perp}$ et que $P_V(u) \in V$, on a $< u - P_V(u), P_V(u) >= 0$. Il résulte des deux inégalités obtenues :

$$\underset{(= \|u - P_V(u)\|^2)}{< u - P_V(u), u - P_V(u) >} = 0, \quad \text{d'où } u = P_V(u),\ i.e.,\ u \in V.$$

Passons à présent à la démonstration de (j), (jj) et (jjj).

(j) L'élément $\overline{\overline{u}} := u - P_V(u)$ vérifie :

$$\overline{\overline{u}} \in V^{\perp} \text{ (déjà vu)}$$

et $< u - \overline{\overline{u}}, y >=< P_V(u), y >= 0$ pour tout $y \in V^{\perp}$.
Donc, au vu de la caractérisation ($\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown$), $\overline{\overline{u}} = P_{V^{\perp}}(u)$.

(jj) Comme $P_V(u)$ et $P_{V^\perp}(u)$ sont orthogonaux, on a $(\triangledown\triangledown\triangledown)$ par le théorème de PYTHAGORE (Chapitre 1, paragraphe 1.3.3).

(jjj) D'après la caractérisation $(\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown)$:

$$< u - P_V(u), x >= 0 \text{ et } < v - P_V(v), x >= 0 \text{ pour tout } x \in V.$$

Faisons $x = P_V(v)$ dans la 1^{ere} relation et $x = P_V(u)$ dans la 2^{eme} :

$$< u - P_V(u), P_V(v) >= 0 \text{ et } < v - P_V(v), P_V(u) >= 0.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{c} < u, P_V(u) >=< P_V(u), P_V(v) > \\ < v, P_V(u) >=< P_V(v), P_V(u) >, \end{array}$$

d'où le résultat $(\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown)$ escompté.

■

Une partie A de H est dite **totale** si *vect* A est partout dense dans H, *i.e.* $\overline{(vect\ A)} = H$. La question se pose notamment lorsque $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (famille d'éléments de H, indexée par $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$)). Ce qui suit est un corollaire facile de la Proposition 5.2.7. et du Théorème 5.2.8..

Corollaire 5.2.9. *Soit V un sous-espace vectoriel d'**un espace de Hilbert** $(H, < .,. >)$. Alors $\overline{V} = V^{\perp\perp}$.*
Si A est une partie non vide de H, alors $\overline{(vect\ A)} = A^{\perp\perp}$. En particulier :

$$(\triangledown) \begin{pmatrix} A \text{ est totale} \\ \text{dans } H \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} < v, u >= 0 \text{ pour} \\ \text{tout } u \in A \end{pmatrix} \Rightarrow (v = 0) \right].$$

Dans $(\triangledown)$, c'est surtout l'implication $[\Leftarrow]$ qui sert (pour démontrer précisément qu'une partie A est totale).

$$[(\forall n \in \mathbb{N}, < v, e_n >= 0) \Rightarrow (v = 0)] \Rightarrow [\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est totale dans } H].$$

Exercice 5.2.10. *Soit $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ une famille totale dans H.*
On pose $V_n = vect\{e_0, e_1, ..., e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$\begin{array}{c} V_n \subset V_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} = H. \end{array}$$

Soit $u \in H$.

- *Rappeler pourquoi l'opération de projection sur V_n est licite.*
- *Démontrer que $P_{V_n}(u) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$.*

Exercice 5.2.11. *Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert $(H, < .,. >)$, tels que $V_1 \subset V_2$.*
Montrer qu'alors :

$$P_{V_2} \circ P_{V_1} = P_{V_1} \circ P_{V_2} = P_{V_2}$$

[*théorème dit **des trois perpendiculaires** (vite un dessin s.v.p. !)*]


ÇA VA VOUS FAIRE PLAISIR:
EXAMEN PARTIEL
A LA "LOFTSTORY"!
?!
NONO

Chapitre 6

Connexité(s) ; Convexité

"L'étude de la convexité est l'occasion d'appliquer les idées de la Mécanique aux Mathématiques."

J.-J. Moreau (1923-)

Ce chapitre un peu à part, et venant après avoir étudié pas mal de choses en Topologie (notamment les applications continues au chapitre 4), traite en première partie de la **connexité** (et non la "connexion" ; **connectedness** en Anglais). On peut dire qu'intuitivement la connexité étudie le nombre de morceaux dont est fait un sous-ensemble S de E. Deux notions de connexité seront introduites et étudiées : la **connexité par arcs** et la **connexité** tout court.
La deuxième partie du chapitre traite de la **convexité**, notion purement vectorielle mais aux propriétés topologiques tout à fait intéressantes. On a déjà rencontré des convexes fermés d'un espace de Hilbert dans la deuxième partie du chapitre 5.

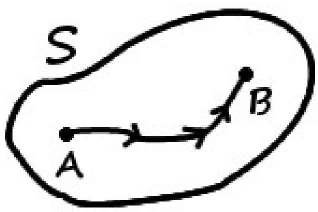
6.1 Connexité(s)

6.1.1 La connexité par arcs

(E, d) est un espace métrique, parfois seulement un espace vectoriel normé.

Définition 6.1.1. *On appelle* ***arc*** *ou* ***chemin*** *de $S \subset E$ toute application continue γ d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers S*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [a,b] & \to & S \\ & t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$$



$A = \gamma(a)$ est l'origine de l'arc, $B = \gamma(b)$ son extrémité. On dit que γ joint ou relie A à B.

Fig. 1

Il n'y aurait pas de perte de généralité à supposer $[a, b] = [0, 1]$, mais nous gardons $[a, b]$ pour plus de flexibilité.
On dit que l'arc est **simple** si

$$\big(t \neq t',\ t \text{ et } t' \text{ dans }]a, b[\big) \Rightarrow \big(\gamma(t) \neq \gamma(t')\big).$$

La partie $\gamma([a, b])$ est appelée l'**image** ou la **trajectoire** de γ [1]

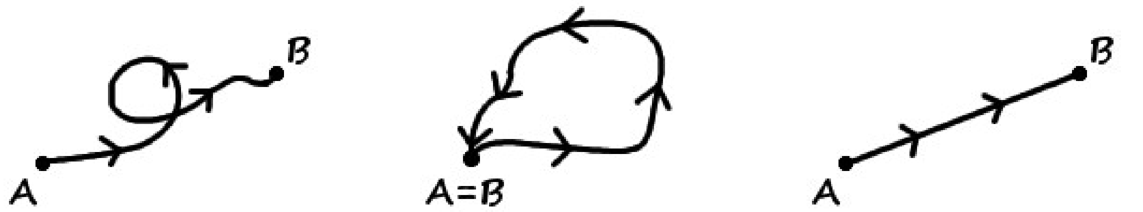
Exemple 6.1.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. réel, et soit A et B deux points (différents) de E. Alors, l'arc*

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (1 - t)A + tB$$

joint A à B ; son image est un ***segment*** *dans E (qu'on note parfois $[A, B]$ tout simplement). Bref, on tire un trait entre A et B.*

1. Seule la continuité est requise sur γ ; la trajectoire de γ peut donc être une ligne brisée.

La Définition 6.1.1. est très "géométrique" ou "cinématique", il ne faut donc pas se priver de faire des dessins dans le plan (2D) ou dans l'espace (3D) pour soutenir son intuition ou raisonnement.



Arc qui n'est pas simple — Lacet (appelé ainsi) — Segment joignant A à B

Fig. 2

Définition 6.1.3. *On dit qu'une partie $S \subset E$ est* ***connexe par arcs*** *si, pour tout couple (A, B) de points de S, il existe un arc d'origine A et d'extrémité B (entièrement) contenu dans S.*
En d'autres mots : deux points quelconques de S peuvent être reliés par un chemin tracé dans S.

Exemple 6.1.4.
- *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Alors S n'est pas connexe par arcs.*
- *Soit $A_1, ..., A_p$ p points de $\mathbb{R}^2$ et $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{A_1, ..., A_p\}$. Alors, S est connexe par arcs.*
- *La connexité par arcs de S n'implique pas celle de $\overline{S}$ ou de $\overset{\circ}{S}$. Que $\overline{S}$ ne soit pas nécessairement connexe par arcs est un peu subtil...*
- *Si S et T sont deux parties connexes par arcs de (E, d) telles que $S \cap T \neq \emptyset$, alors $S \cup T$ est connexe par arcs.*

Exemple 6.1.5. *Dans un e.v.n. $(E, \|.\|)$, on dit qu'une partie de S est* ***étoilée*** *par rapport à $A \in S$ si, pour tout $B \in S$, le segment $[A, B]$ est contenu dans S. Bref, du point A on "voit" tout point de S.*

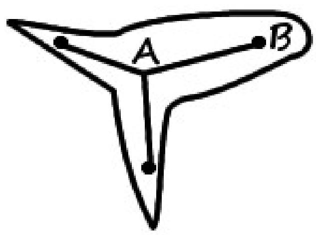


Fig. 6

Si S est étoilé (par rapport à A par exemple), alors S est connexe par arcs.
Le démontrer (c'est facile).

Exemple 6.1.6. *Si $S \subset E$ est connexe par arcs, et si $T \subset F$ est connexe par arcs, alors $S \times T \subset E \times F$ est connexe par arcs.*

Théorème 6.1.7. *Soit $f : E \to F$ une application continue, soit $S \subset E$ connexe par arcs. Alors $f(S)$ est connexe par arcs.*

En une seule phrase : "**L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs**".

Démonstration

(Très simple). Soit A' et B' deux points dans $f(S)$, c'est-à-dire $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, où A et B sont deux points de S. Considérons un arc γ joignant A à B dans S. Alors, le nouvel arc $\varphi := f \circ \gamma$ joint A' à B' dans $f(S)$.

■

Comment sont faites les parties connexes par arcs de $E = \mathbb{R}$?

Théorème 6.1.8. *$S \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, S est un intervalle.*

Démonstration

(Idée). Utiliser le fait que l'image continue d'un intervalle est un intervalle.

■

6.1.2 La connexité

Voici une notion un peu plus générale que celle de connexité par arcs... Elle est aussi un peu plus délicate. Si l'étudiant-lecteur se sent perdu dans ce paragraphe, qu'il se contente d'étudier (et de maîtriser) le paragraphe 6.1.1 sur la connexité par arcs.
Plutôt que de dire d'emblée ce que nous entendons par partie connexe, nous expliquons ce que nous entendons par **partie non connexe** (ou **disconnexe**).

Définition 6.1.9. *$S \subset E$ est dite **non connexe** (ou **disconnexe**) si on peut écrire*

$$S = S_1 \cup S_2 \ (S_1 \text{ et } S_2 \text{ non vides}) \tag{1}$$

et s'il existe deux ouverts U et V tels que

$$S_1 \subset U,\ S_2 \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset. \tag{2}$$

Les propriétés (1)-(2) traduisent l'idée intuitive que S est "partagé en deux morceaux" (au moins).
Si les propriétés (1)-(2) ne sont pas possibles pour S, on dira que S est **connexe** ; cela traduit l'idée intuitive que "S est d'un seul tenant".

Exemple 6.1.10. *Si S et T sont connexes et si S et T ont un point commun, alors $S \cup T$ est connexe.*

Le théorème suivant fait le pont avec la notion de connexité par arcs vue au paragraphe 6.1.1.

Théorème 6.1.11. *Si S est connexe par arcs, il est alors connexe.*

Si on fait un distinguo entre connexité par arcs et connexité, c'est qu'il y a des ensembles (même dans $\mathbb{R}^2$) qui sont connexes et ne sont pas connexes par arcs.
Voici une propriété utile dans des démonstrations de connexité d'ensembles.

Propriété 6.1.12. *Si $S \subset E$ est une partie connexe, alors $\overline{S}$ est encore connexe. En fait, "tout ce qui est coincé entre S et $\overline{S}$ est connexe" :*

$$(S \subset T \subset \overline{S}) \Rightarrow (T \text{ est connexe}).$$

Comme cela a déjà été signalé plus haut, cette propriété n'est pas vraie si on remplace "connexe" par "connexe par arcs".
Les deux théorèmes qui suivent sont les pendants des deux théorèmes (Théorème 4.4.1 et Théorème 4.4.2) vus au chapitre 4 (paragraphe 4.4) à propos de la compacité. Le premier, le Théorème 6.1.13, est à rapprocher du Théorème 6.1.7 du paragraphe 6.1.1.

Théorème 6.1.13. *Soit $f : E \to F$ une application continue, soit $S \subset E$ connexe. Alors $f(S)$ est connexe.*

In a few words : "**L'image continue d'un connexe est connexe**".

Démonstration

Elle est simple, typique d'une démonstration de connexité par l'absurde. Supposons que $f(S)$ ne soit pas connexe. Utilisant la Définition 6.1.9, on peut donc écrire

$$f(S) = T_1 \cup T_2 \ (T_1 \text{ et } T_2 \text{ non vides}),$$

et il existe deux ouvertes U et V (de l'espace image F) tels que

$$T_1 \subset U,\ T_2 \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Mais alors, désignant $S_1 = f^{-1}(T_1)$, $S_2 = f^{-1}(T_2)$,

$$S = S_1 \cup S_2 \ (S_1 \text{ et } S_2 \text{ non vides}), \tag{3}$$

$$S_1 \subset f^{-1}(U),\ S_2 \subset f^{-1}(V) \text{ et } f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset. \tag{4}$$

Comme f est continue, $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont des ouverts (de E). Donc, (3)-(4) traduisent que S n'est pas connexe (*cf.* Définition 6.1.9). D'où la contradiction.

■

On a vu (*cf.* Théorème 6.1.8) que dans $\mathbb{R}$ il n'y a pas de différence entre "être connexe par arcs" et "être un intervalle". En fait, il se trouve qu'il en est de même pour "être connexe" (ouf, toujours ça de gagné !).
Lorsque f est une fonction numérique (à valeurs réelles donc), le résultat qui suit étend celui vu en 1^{er} cycle (théorème dit **des valeurs intermédiaires**) : "**L'image continue d'un intervalle est un intervalle**".

Théorème 6.1.14. ***(fon-da-men-tal !)***
Soit S une partie ***connexe*** *de E, soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(S)$ est un* ***intervalle*** *de $\mathbb{R}$.*

Un exemple d'application : Sous les hypothèses du Théorème 6.1.14, s'il existe $u \in S$ tel que $f(u) > 0$ et $v \in S$ tel que $f(v) > 0$, alors il existe $\overline{x} \in S$ tel que $f(\overline{x}) = 0$.
Pour ne pas effrayer l'étudiant-lecteur, nous terminons ce paragraphe 6.1.2 en indiquant un situation où les deux notions voisines introduites aux paragraphes 6.1.1 et 6.1.2 coïncident.

Proposition 6.1.15. *Soit Ω une partie **ouverte** d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Alors Ω est connexe si, et seulement si, Ω est connexe par arcs.*

Exercice 6.1.16. *Soit Ω l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Ω n'est pas connexe par arcs. **Indication** : Utiliser la fonction déterminant (fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).*

Exercice 6.1.17. *(à reprendre en Calcul différentiel au second semestre).*

1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω (et même $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, si on veut). Avoir "$\bigtriangledown f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$" implique t-il que $f$est constante sur tout Ω.*
2. *Supposons que Ω, en plus d'être ouvert, est connexe (ou, ce qui est équivalent ici, connexe par arcs). Montrer qu'alors :*

$$(\bigtriangledown f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega) \Leftrightarrow (f \text{ est constante que } \Omega).$$

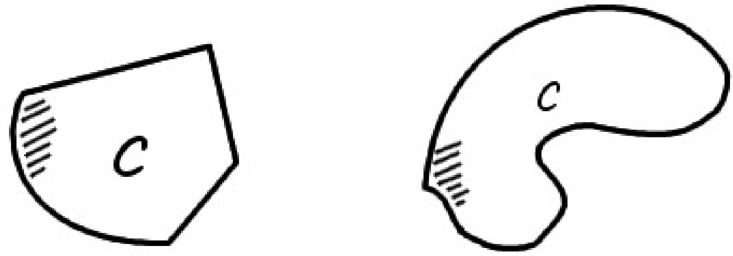
Question additionnelle de réflexion : A quoi peut servir ce type de résultat ?

6.2 Convexité

Connexité, convexité... une seule lettre est changée et pourtant la notion de convexité est complètement différente de celle de connexité (avec laquelle elle a pourtant quelques... connexions). Tout d'abord, la convexité est une notion purement vectorielle, mais aux conséquences topologiques fort intéressantes.
Le contexte de travail est ici :$(E, \|.\|)$ **espace vectoriel normé réel**. Rappelons :

Définition 6.2.1. *On dit qu'une partie $C \subset E$ est* **convexe** *(on dit aussi "C est un convexe") si :*

$$\begin{pmatrix} x \text{ et } y \text{ dans } C \\ \lambda \in [0,1] \end{pmatrix} \Rightarrow \big(\lambda x + (1-\lambda)y \in C\big). \qquad (2.1)$$



C est convexe $\qquad$ C n'est pas convexe

Fig. 4

Quelques propriétés (immédiates ou faciles à démontrer)

- Si C et D sont convexes, il en est de même de $C + D$.
- Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes, alors $C := \bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.
- $B(0,r)$ et $\overline{B}(0,r)$ sont convexes.
- Si C est convexe, il en est de même de $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$.

Définition 6.2.2. *Une* **combinaison convexe** *d'éléments $x_1, ..., x_k$ de E est un élément de la forme*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k, \text{ où } \alpha_1 + ... + \alpha_k = 1 \text{ et } \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., k \qquad (2.2)$$

En géométrie du plan ou de l'espace, on pourrait parler de $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$ comme du **barycentre** des points x_i affectés des poids α_i.

Proposition 6.2.3. *C est convexe si, et seulement si, il contient toute combinaison convexe d'éléments de C.*

Démonstration

- La définition (2.1) utilise simplement les combinaisons convexes de deux éléments. Donc, si la propriété de la proposition au-dessus est acquise pour C, C est convexe.
- Réciproque (plus intéressante). Soit C convexe au sens de la Définition 6.2.1. Soit $x_1, ..., x_k$ dans C, soit $\alpha_1, ..., \alpha_k$ des réels positifs de somme égale à 1. L'un de ces coefficients α_i est > 0, par exemple α_1. Alors formons

$$y_2 := \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}x_2 \left[= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\right]$$

qui est dans C (d'après la Définition 6.2.1). Puis

$$y_3 := \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}y_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}x_3 \left[= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\right]$$

qui est dans C (pour la même raison qu'au-dessus). Ainsi de suite jusqu'à

$$y_k := \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}}{1}y_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1}x_k \left[= \frac{1}{1}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k)\right].$$

■

Avec la propriété que l'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe et la Proposition 6.2.3, nous sommes prêts pour la définition et les propriétés suivantes.

Définition 6.2.4. *Soit $S \subset E$. On appelle* ***enveloppe convexe*** *de S l'ensemble convexe noté coS (ou $convS$) et défini par :*

$$coS = \bigcap\{C \text{ convexe, } S \subset C\}. \tag{2.3}$$

On appelle ***enveloppe convexe fermée*** *de S l'ensemble convexe fermé noté $\overline{co}S$ et défini par*

$$\overline{co}S = \bigcap\{C \text{ convexe fermé, } S \subset C\}. \tag{2.4}$$

On montre très facilement que $\overline{co}S$ est l'adhérence de coS, ce qui fait que la notation dans (2.4) ne présente pas d'ambiguïté.

Proposition 6.2.5. *Soit $S \subset E$. Alors :*

$$coS = \{\text{combinaisons convexes d'éléments de } S\}. \tag{2.5}$$

Démonstration

Facile ; à faire sous forme d'exercice.

A priori, dans les combinaisons convexes permettant de construire coS (*cf.* (2.5)), on est obligé de considérer tous les $k = 1, 2, \ldots, \ldots \in \mathbb{N}^*$. Toutefois, lorsque E est de dimension finie, disons n, on peut s'arrêter à un nombre k bien déterminé (fonction de n). Voici donc, sans démonstration, deux résultats dans ce sens.

Théorème 6.2.6. *Supposons E de dimension n et $S \subset E$.*

- *(*C. Carathéodory*) Tout élément x de coS peut être représenté comme une combinaison convexe de $n+1$ éléments de S.*
- *(*W. Fenchel et L. Bunt*) Si S est connexe, tout élément x de coS peut être représenté comme une combinaison convexe de n éléments de S.*

Ces résultats sont très expressifs du point de vue géométrique, il est fortement recommandé de les illustrer par des petits dessins dans le plan (dimension $n = 2$).

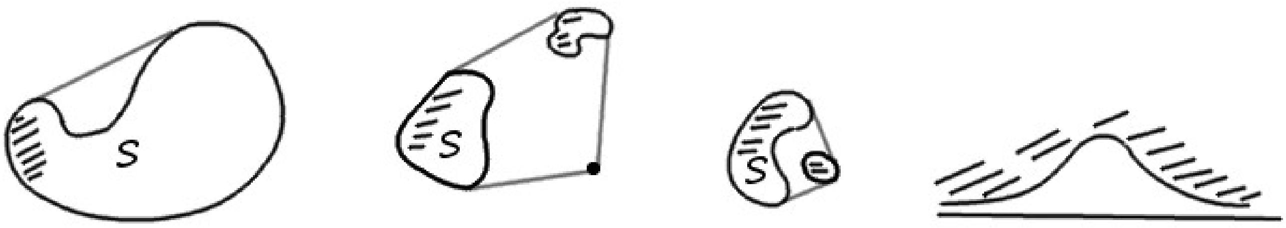


Fig. 5 : de S à coS.

Un lecteur intéressé pourra compléter sa culture sur le sujet en étudiant le chapitre A de l'excellent livre, par d'excellents auteurs :
J.-B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal, Fundamentals of convex analysis, Grundlehren Text Editions, Springer (2001).

A retenir absolument.
Dans $E = \mathbb{R}$, "être connexe par arcs", "être connexe", et "être convexe" sont des notions équivalentes ; c'est la seule fois où on peut se permettre cette faute de frappe : v$\leftrightarrows$n. Les seules parties vérifiant cette propriété sont les **intervalles**.

Chapitre 7

Analyse hilbertienne (suite) : L'isométrie de F. Riesz d'un Espace de Hilbert ; Opérateur Adjoint d'un Opérateur ; Une Application : Problèmes de moindres carrés ; Bases hilbertiennes

"Les espaces hilbertiens ou espaces de Hilbert *sont l'outil fondamental des applications de l'Analyse à la Physique et aux Sciences de l'ingénieur".*

L. Schwartz

On a eu dans chaque chapitre l'occasion de parler des esapces préhilbertiens ou des espaces de Hilbert, notamment Chapitre 1 page 15 à 19, Chapitre 2 page 27 à 32, Chapitre 5 page 79 à 87... Nous poursuivons dans ce chapitre l'Analyse hilbertienne avec le théorème de RIESZ, la notion d'opérateur adjoint d'un opérateur, les bases hilbertiennes, etc.

7.1 L'isométrie de F. RIESZ d'un espace de Hilbert

Soit $(H, < ., . >)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $u \in H$ fixé, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi_u : H & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \varphi_u(v) :=< u, v > \end{array}$$

est une forme linéaire continue, et $\|\varphi_u\|' = \|u\|$ (cela a déjà été vu à plusieurs reprises). Nous montrons que par ce moyen nous retrouvons l'effet de tous les éléments de l'ensemble H' des formes linéaires continues sur H.

Théorème 7.1.1. *(*F. RIESZ [1]*)*
On suppose que H est un ***espace de Hilbert*** *(Attention ici !). Alors, $J : H \to H'$ définie par : $u \mapsto (J(u) : v \mapsto [J(u)](v) :=< u, v >)$ est* ***linéaire, bijective*** *et* ***isométrique****.*
J est appelée l'application de dualité de H ou l'isométrie de F. RIESZ *de H.*

Démonstration

Etape 1. J est linéaire. En effet :

$$\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall u, u' \in H,\ J(\lambda u + \lambda' u') = \lambda J(u) + \lambda' J(u')\,;$$

comme cela est aisé à vérifier.

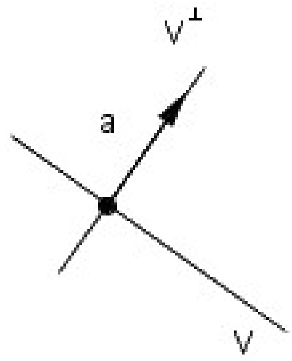
Etape 2. J est une isométrie (linéaire).
Comme on a : $\|J(u)\|' = \|\varphi_u\|' = \|u\|$, J est bien une isométrie linéaire.

Etape 3 (l'essentielle). J est surjective (c'est la seule chose qui reste à vérifier, *cf.* Chapitre 1 page 7 en bas si nécessaire).
Soit $\varphi \in H'$; il nous faut démontrer qu'il existe $\hat{u} \in H$ tel que $\varphi = \varphi_{\hat{u}}$ nécessairement.
Si $\varphi = 0$, le vecteur $\hat{u} = 0$ fait l'affaire $(0 = \varphi_0)$.
Supposons $\varphi \neq 0$. Considérons $V := \ker \varphi$; c'est un hyperplan fermé de H, donc complet (car contenu dans H qui a été supposé complet). On peut donc appliquer le théorème de projection orthogonale du chapitre précédent (Chapitre 5, Théorème 5.2.8.) :

$$H = V \oplus V^{\perp},\ V^{\perp} = \mathbb{R}a \text{ (où } a \neq 0)$$

(a peut être trouvé comme suit : soit $u \in H \setminus V$ (ce choix est possible car $V \subsetneq H$ (puisque $\varphi \neq 0$)), on prend ensuite $a = u - P_V(u)$).

1. Les deux frères RIESZ, Frédéric et Marcel, sont deux mathématiciens hongrois. F. RIESZ est né en 1880 et mort en 1956.



Donc, tout $v \in H$ va s'écrire : $v = w + \lambda a$, où $w \in V$. D'où

$$< v, a > = < w, a > + \lambda \|a\|^2 = 0 + \lambda \|a\|^2 \text{ car } < w, a > = 0.$$

Ainsi $v = w + \dfrac{< v, a >}{\|a\|^2} a$ (représentation qui "se lit" sur une figure).
On a donc :

$$\forall v \in H, \varphi(v) = \varphi(w) + \frac{< v, a >}{\|a\|^2} \varphi(a) = < \frac{\varphi(a) a}{\|a\|^2}, v >,$$

c'est-à-dire :

$$\varphi = \varphi_{\hat{u}}, \text{ où } \hat{u} := \varphi(a) \frac{a}{\|a\|^2}.$$

(Noter que, bien entendu, deux choix différents de a donnent lieu au même $\hat{u}$ (puisque les deux a en question sont colinéaires)).

■

Grâce au Théorème 1.1. on peut donc dire que, d'une certaine manière, H' et H sont "identifiables" :

7.1.2. *$\forall \varphi \in H', \exists u \in H$ unique tel que $\varphi = < u, . >$.*
On gardera toutefois en tête l'isométrie J qui a servi à cette identification, car on peut vouloir (ou avoir besoin) dans certaines situations d'autres manières de "représenter" H', et donc d'autres isométries.

Une première conséquence du théorème de F. Riesz : un produit scalaire sur H'.
Il est naturel de penser à poser sur H'

$$< \varphi, \psi >_{H'} := < J^{-1}(\varphi), J^{-1}(\psi) >_H .$$

On vérifie facilement que $< ., . >_{H'}$ est un produit scalaire sur H', et que ce produit scalaire donne lieu à la norme $\|.\|'$ utilisée sur H' : $\|.\|' = \sqrt{< ., . >_{H'}}$.
A l'aide de l'isométrie J ou de son inverse J^{-1} on passe de H sur H' et vice versa.

Un modèle ou espace-pivot d'espace de Hilbert de dimension infinie est l'espace de Lebesgue $L^2([a, b])$.

7.2 Opérateur adjoint d'un opérateur

On rappelle le résultat suivant d'**Algèbre bilinéaire** (*cf.* 1^{er} cycle).
Soit $(E_1, <.,.>_1)$ et $(E_2, <.,.>_2)$ deux espace euclidiens et $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. L'adjoint u^* de u est l'application linéaire de E_2 dans E_1 définie comme suit :

$$\forall x \in E_1, y \in E_2, < u(x), y >_{E_2} = < x, u^*(y) >_{E_1} .$$

Si E_1 et E_2 sont munis de bases orthonormées pour $<.,.>_{E_1}$ et $<.,.>_{E_2}$ respectivement, les matrices de u et de u^* dans ces bases sont transposées l'une de l'autre.
Ce qui suit est un prolongement de ces notions au **contexte hilbertien** (on ne considérera que celui-là).

Théorème 7.2.1. *Soit $(H_1, <.,.>_{H_1})$ et $(H_2, <.,.>_{H_2})$ deux **espaces de Hilbert**, et soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors A possède un et un seul adjoint A^*, c'est-à-dire une application $A^* : H_2 \to H_1$ telle que :*

$$(\triangle)\ \forall u \in H_1, v \in H_2,\ < A(u), v >_{H_2} = < u, A^*(v) >_{H_1}.$$

A^* est linéaire continue, et $|||A^*|||_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = |||A|||_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$.

Démonstration

Etape 1. S'il existe, l'adjoint est unique.
Supposons en effet : $\forall u \in H_1, v \in H_2$,

$$< A(u), v > = < u, A_1^*(v) > = < u, A_2^*(v) >$$

On en déduit : $\forall u \in H_1, v \in H_2$, $< u, A_1^*(v) - A_2^*(v) > = 0$, soit en choisissant $u := A_1^*(v) - A_2^*(v)$, $\|A_1^*(v) - A_2^*(v)\|^2 = 0$. Ainsi : $\forall v \in H_2$, $A_1^*(v) - A_2^*(v) = 0$, *i.e.* $A_1^* = A_2^*$.

Etape 2. S'il existe l'adjoint A^* de A est linéaire.
Il suffit de revenir aux définitions pour vérifier qu'effectivement :

$$\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall v, v' \in H_2, A^*(\lambda v + \lambda' v') = \lambda A^*(v) + \lambda' A^*(v').$$

Etape 3. Si A^* existe, $(A^*)^*$ existe aussi, et $(A^*)^* = A$.
En effet, si A^* existe, on doit avoir :

$$\forall u \in H_1, v \in H_2, < A(u), v > = < u, A^*(v) > .$$

Mais $< A^*(v), u > = < u, A^*(v) > = < A(u), v > = < v, A(u) >$ (d'après ce qui précède).
On a donc tout ce qu'il faut pour dire que $(A^*)^*$ existe et vaut A.

Etape 4. Si A^* de $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ existe, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $|||A||| = |||A^*|||$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée en $(\triangle)$, on a :

$$\begin{array}{rcll} |< u, A^*(v) >| & = & |< A(u), v >| & \leq \quad \|A(u)\|.\|v\|, \\ \text{puis} \quad |< u, A^*(v) >| & = & |< A(u), v >| & \leq \quad |||A|||.\|u\|.\|v\|. \end{array}$$

On fait $u = A^*(v)$; alors :

$$\|A^*(v)\|^2 =< A^*(v), A^*(v) > \leq |||A|||.\|A^*(v)\|.\|v\|.$$

Donc, pour tout $v \in H_2$ tel que $A^*(v) \neq 0$;

$$\|A^*(v)\| \leq |||A|||.\|v\|.$$

Les $v \in H_2$ tels que $A^*(v) = 0$ ne gênant en rien dans l'inégalité ci-dessus, on a bien :

$$(\triangle\triangle) \ \|A^*(v)\| \leq |||A|||.\|v\| \text{ pour tout } v \in H_2.$$

A^* étant linéaire (*cf.* Etape 2), l'inégalité $(\triangle\triangle)$ indique bien que A^* est continue, avec $|||A^*||| \leq |||A|||$.
Si l'on change A en A^* dans la démonstration, sachant que $(A^*)^* = A$ (*cf.* Etape 3), on obtient $|||A||| \leq |||A^*|||$. D'où l'égalité annoncée.

Etape 5. $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ possède bien un adjoint A^*.
Pour tout $v \in H_2$ fixé, considérons $\begin{array}{rccl} \psi_v : & H_1 & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \psi_v(u) :=< A(u), v > \end{array}$.
ψ_v est une forme liéaire (c'est clair), continue car :

$$|\psi_v(u)| = |< A(u), v >| \leq \|A(u)\|.\|v\| \leq |||A|||.\|u\|.\|v\|.$$

ψ_v est donc un élément de H_1', on applique le théorème de F. RIESZ (*cf.* 7.1.2.) :
$\exists a_v \in H_1$ tel que $\psi_v =< a_v, . >$. On a ainsi défini une **application**
$\begin{array}{rccl} B : & H_2 & \to & H_1 \\ & v & \mapsto & B(v) := a_v \text{ (défini comme au-dessus).} \end{array}$
Par construction même :

$$\forall u \in H_1, \forall v \in H_2, \psi_v(u) =< a_v, u >= \begin{array}{l} \nearrow \ < A(u), v > \\ \\ \searrow \ < u, B(v) > \end{array} .$$

Donc, par définition même de ce doit être A^*, on a $B = A^*$.

■

Un petit formulaire sur les adjoints (semblable à celui vu en Algèbre linéaire)

$(A^*)^* = A$, $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \lambda A^*$, $(id_H)^* = id_H$, $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$
Si A est inversible et que A^{-1} est continue, A^* est à son tour inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Exemple 7.2.2. *V est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $(H, < .,. >)$. Alors, d'après le $(\triangledown\triangledown\triangledown\triangledown)$ du Théorème 5.2.8 du Chapitre 5 :*

$$(P_V)^* = P_V$$

Exemple 7.2.3. *Soit* $\varphi \in H'$, *donc* $\varphi =< a, . >$ *pour un* $a \in H$ *unique (cf. 7.1.2.) Comme :*

$$\forall u \in H,\ \forall r \in \mathbb{R},\ \underbrace{\varphi(u).r}_{\text{produit scalaire dans } \mathbb{R}} =< a, u > r =< u, ra >,$$

on a $\varphi^* : \mathbb{R} \to H$ *définie par* $\varphi^*(r) = ra$.

Exemple 7.2.4. *Soit* $\theta \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ *donné et*

$$\begin{array}{rclcl} A_\theta & : & L^2([a, b]) & \to & L^2([a, b]) \\ & & f & \mapsto & \big(A_\theta(f) : t \mapsto [A_\theta(f)](t) = \theta(t)f(t)\big). \end{array}$$

$A_\theta(f) \in L^2([a, b])$ *(facile à voir). Comme*

$$< A_\theta(f), g >_{L^2([a,b])} = \int_{[a,b]} \theta(t)f(t)g(t)dt \text{ pour tout } f, g \in L^2([a, b]),$$

on a bien

$$\big((A_\theta)^* =: \big)A_\theta^* : g \mapsto A_\theta^*(g) : t \mapsto [A_\theta^*(g)](t) = \theta(t)g(t),$$

c'est-à-dire : $A_\theta^* = A_\theta$.

Exercice 7.2.5. *Etant donné* $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, soit*

$$\begin{array}{rclcl} A & : & L^2([a, b]) & \to & L^2([a, b]) \\ & & u & \mapsto & \left(A(u) : t \mapsto [a(u)](t) := \displaystyle\int_{[a,b]} K(t, s)u(s)ds\right). \end{array}$$

A est linéaire (c'est clair), et continue car

$$\|A(u)\|^2_{L^2([a,b])} \leq \left[\int_{[a,b]^2} |K(t, s)|^2 dsdt\right].\|u\|^2_{L^2([a,b])} \text{ (d'accord ?)}.$$

La relation de définition de A^* *est :*
$\forall u, v \in L^2([a, b])$,

$$< A(u), v >_{L^2([a,b])} =< u, A^*(v) >_{L^2([a,b])} .$$

Exploitons ceci, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]} K(t, s)u(s)ds\right].v(t)dt &= \int_{[a,b]^2} K(t, s)u(s)v(t)dsdt \\ & \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Utilisation du théorème de Fubini} \\ \text{cf. Cours de Calcul intégral.} \end{array}\right) \\ &= \int_{[a,b]} \left[\int_{[a,b]} K(t, s)v(t)dt\right].u(s)ds. \end{aligned}$$

on voit mieux (et on compare mieux avec A) en écrivant

$$[A^*(v)](t) = \int_{[a,b]} K(s,t)v(s)ds.$$

A^* est donc comme A : à la place du noyau $K : (t,s) \mapsto K(t,s)$, on a le noyau $K^* : (t,s) \mapsto K^*(t,s) := K(s,t)$.

Définition 7.2.6. *$A \in \mathcal{L}(H)$ est dit **auto-adjoint** lorsque $A = A^*$ (i.e. A est son propre adjoint).*

C'est le cas dans l'Exemple 7.2.4 au-dessus, ainsi que dans l'Exemple 7.2.5 lorsque le noyau K est "symétrique" ($K(s,t) = K(t,s)$ pour tout s,t dans $[a,b]$).

Exercice 7.2.7. *Intéressant.*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Montrer qu'alors

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} |< Ax, x >|.$$

Les résultats qui suivent ressemblent fort à des résultats vus dans le contexte des espaces euclidiens (en 1^{er} cycle), mais attention aux fermetures (inutiles dans un contexte de dimension finie) !

Théorème 7.2.8. *D'une utilisation fréquente.*
Soit $(H_1, < .,. >_1)$ et $(H_2, < .,. >_2)$ deux espaces de Hilbert, et soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors :

1. $\ker A = (Im\ A^*)^\perp$, $\ker A^* = (Im\ A)^\perp$;
2. $\overline{Im\ A} = (\ker A^*)^\perp$, $\overline{Im\ A^*} = (\ker A)^\perp$.

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & & & A^* & \\ H_1 & \longrightarrow & H^2 & \quad & H_1 & \longleftarrow & H^2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \ker A & & Im\ A & & Im\ A^* & & \ker A^* \end{array}$$

Pour se souvenir de ce qu'il faut fermer et ce qu'il est inutile de fermer dans ce nouveau "jeu de bascule", se rappeler que $\ker B$ est toujours fermé lorsque B est linéaire continue, alors que $Im\ B$ ne l'est pas.

Démonstration du Théorème 7.2.8

Comme $(A^*)^* = A$, il suffit de démontrer la "moitié" de 1. et 2..

1. $(u \in \ker A) \Leftrightarrow (Au = 0) \Rightarrow (\forall v \in H_2, < Au, v >= 0)$
   $\Rightarrow (\forall v \in H_2, < u, A^*v >= 0) \Leftrightarrow (\forall w \in Im\ A^*, < u, w >= 0)$.
   Donc $\ker A \subset (Im\ A^*)^\perp$.
   Réciproquement, soit $u \in (Im\ A^*)^\perp$.
   $(\forall w \in Im\ A^*, < u, w >= 0) \Leftrightarrow (\forall v \in H_2, < u, A^*v >= 0)$
   $\Rightarrow (\forall v \in H_2, < Au, v >= 0) \Leftrightarrow (Au = 0)$.
   Donc $(Im\ A^*)^\perp \subset \ker A$.

2. D'après le Corollaire 5.2.9 du chapitre précédent, si V est un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, $V^{\perp\perp} = \overline{V}$. Appliquons ce résultat à $V = \ker A$; on obtient :
$$(\ker A)^{\perp} = (Im\ A^*)^{\perp\perp} = \overline{Im\ A^*}.\ \text{CQFD.}$$

■

Exercice 7.2.9. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. *Montrer que* $Im\ A$ *est fermé si et seulement si* $Im\ A^*$ *est fermé.*
Montrer : $\ker(A^* \circ A) = \ker A$ *(et donc* $\ker(A \circ A^*) = \ker A^*$*).*

Exercice 7.2.10. *Soit* $\begin{array}{cccl} A & : & L^2([0,1]) & \rightarrow & L^2([0,1]) \\ & & f & \mapsto & A(f) : t \mapsto [A(f)](t) := tf(t). \end{array}$
Montrer que $Im\ A$ *est dense dans* $L^2([0,1])$ *mais que* $Im\ A \subsetneq L^2([0,1])$ *(en montrant par exemple que la fonction qui vaut constamment 1 sur* $[0,1]$ *n'est pas dans* $Im\ A$*).*

7.3 Une application : Problèmes de moindres carrés.

On étudiera ce qui suit dans ce paragraphe en gardant à l'esprit ce qui a été fait dans un cours parrallèle (Analyse numérique matricielle) concernant l'équation $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 7.3.1. *Résolution du problème aux moindres carrés.*
*Soit H_1 et H_2 deux **espaces de Hilbert**, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ telle que $Im\ A$ **soit fermée** (dans H_2), soit $v \in H_2$. Alors la problème $(\mathcal{P})$, dit "des moindres carrés" qui consiste à minimiser*

$$(\diamond)\ u \in H_1 \mapsto \|Au - v\|_{H_2}$$

sur H_1 admet des solutions ; elles sont caractérisées comme étant les solutions de l'équation

$$(\diamond\diamond)\ (A^* \circ A)\ u = A^*v,$$

*appelée "**équation normale** du problème de moindres carrés $(\mathcal{P})$". En particulier, si $A^* \circ A$ $(\in \mathcal{L}(H_1))$ est inversible, alors $(\mathcal{P})$ a pour unique solution*

$$(\diamond \diamond \diamond)\ \overline{u} = (A^* \circ A)^{-1} A^*v.$$

Remarquons que minimiser $u \mapsto \|Au - v\|_{H_2}$ sur H_1 équivaut à minimiser $u \mapsto \|Au - v\|_{H_2}^2$, d'où l'expression "les moindres carrés" ("least squares" en Anglais).

Démonstration du Théorème 7.3.1

1^{ere} démonstration. $\overline{u} \in H_1$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$\|A\overline{u} - v\|_{H_2} \leq \|w - v\|_{H_2} \text{ pour tout } w \in Im\ A,$$

c'est-à-dire

$$A\overline{u} \text{ est la projection orthogonale de } v \text{ sur } Im\ A.$$

Comme $Im\ A$ a été supposés fermée (eh oui !), l'opération de projection sur $Im\ A$ est licite et parfaitement déterminée (on est d'accord ?). Il vient de la caractérisation de $P_{Im\ A}(v)$:

$$(\diamond \diamond \diamond\diamond) < A\overline{u} - v, Au >_{H_2} = 0 \text{ pour tout } u \in H_1$$

($A\overline{u} \in Im\ A$, et ce qui est au-dessus est la traduction du fait que $A\overline{u} - v$ doit être dans l'orthogonal de $Im\ A$).
Mais $(\diamond \diamond \diamond\diamond)$ est encore équivalent à

$$< (A^* \circ A)\overline{u} - A^*v, u >_{H_1} = 0 \text{ pour tout } u \in H_1,$$

ce qui revient à avoir :

$$(A^* \circ A)\overline{u} - A^*v = 0.$$

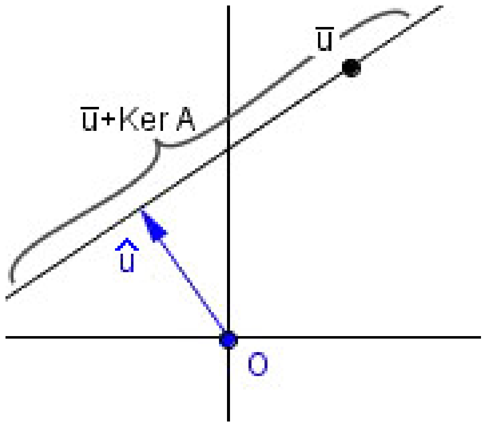
2^e démonstration. [*cf.* Cours de Calcul différentiel] "Variationnelle", en utilisant les ressources du Calcul différentiel et la convexité de la fonction à minimiser.
Soit $f : u \in H_1 \mapsto f(u) := \|Au - v\|^2_{H_2}$. Il est tout d'abord facile de vérifier que f est convexe sur H_1 (*i.e.*, $f(\alpha u + (1-\alpha)u') \leq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(u')$ pour tout u, u' dans H_1 et $\alpha \in [0,1]$). Ensuite, parce que la norme $\|.\|_2$ utilisée est la norme hilbertienne, la fonction $\|.\|_2^2$ est extrêmement "lisse", c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur H_2 avec $\bigtriangledown(\|.\|^2_{H_2})(w) = 2 < w, . >$ pour tout $w \in H_2$. En conséquence, la fonction f est différentiable sur H_1 avec

$$\begin{aligned} h \in H_1 \mapsto 2 < Au - v, Ah > &= 2 < (A^* \circ A)u - A^* v, h > \\ &= < \bigtriangledown f(u), h > \end{aligned}$$

comme différentielle en $u \in H_1$.
La convexité et la différentiabilité de f sur H_1 font que $\overline{u} \in H_1$ minimise f sur H_1 si et seulement si $\bigtriangledown f(\overline{u}) = 0$. D'où le résultat annoncé vu que $\bigtriangledown f(u) = (A^* \circ A)u - A^* v$.

■

Si $v \in Im\ A$, mettons $A\overline{u} = v$, il est clair que $\overline{u}$ est solution du problème des moindres carrés associé à A et v (dans ce cas, la valeur minimale dans $(\mathcal{P})$ est 0 bien sûr).
L'ensemble des solutions de l'équation $Au = v$ est alors $\overline{u} + \ker A$. Parmis ces solution il y en a une et une seule "plus courte" que toutes les autres, c'est-à-dire de norme minimale.



Théorème 7.3.2. *Solution de norme minimale de l'équation $Au = v$.*
Sous les hypothèses du Théorème 7.3.1, avec $v \in Im\ A$, il existe parmi les solutions de l'équation $Au = v$ une et une seule de norme minimale. Cette solution $\hat{u}$ est construite de la manière suivante :

$$(\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond)\ (w \in H_1 \text{ vérifiant } (A \circ A^*)w = v) \rightsquigarrow (\hat{u} = A^* w)$$

[*des $w \in H_2$ différents vérifiant $(A \circ A^*)w = v$ conduisent au même $\hat{u}$*].

On vérifie rapidement ce qui est dit en commentaire ci-dessus, à la fin de l'énoncé du Théorème.

$$\left(\begin{array}{cc} & (A \circ A^*)w_1 = v \\ \text{et} & \\ & (A \circ A^*)w_2 = v \end{array} \right) \Rightarrow \big(A \circ A^*(w_1 - w_2) = 0\big) \Rightarrow \big(A^*(w_1 - w_2) = 0\big)$$

[car $\ker(A \circ A^*) = \ker A^*$, *cf.* Exercice 7.2.9].

Démonstration du Théorème 7.3.2

Comme on l'a dit en préambule à l'énoncé, l'ensemble des solutions de l'équation $Au = v$ est $S := \overline{u} + \ker A$, où $\overline{u}$ est une solution particulière de l'équation $Au = v$. S est donc un sous-espace affine fermé de H_1, et l'élément $\hat{u}$ de S de norme minimale est la projection de 0 sur S. Cet élément $\hat{u}$ est caractérisé de la manière suivante (*cf.* Chapitre 5, page 79) :

$$(*)\ \hat{u} \in S \text{ et } 0 - \hat{u} \in (\ker A)^{\perp}.$$

Comme $(\ker A)^{\perp} = (Im\ A^*)^{\perp\perp}$ (Théorème 7.2.8), que $(Im\ A^*)^{\perp\perp} = \overline{Im\ A^*}$ (Chapitre 5, Corollaire 5.2.9), et que $Im\ A^*$ est fermé (car $Im\ A$ est fermé par hypothèse, *cf.* Exercice 7.2.9), on a en fait la caractérisation :

$$(**)\ \underline{\hat{u} \in S \text{ et } \hat{u} \in Im\ A^*}.$$

Il existe donc $w \in H_2$ tel que $\hat{u} = A^*w$; de plus

$$v = A\hat{u} = (A \circ A^*)w$$

Réciproquement, si $w \in H_2$ vérifie $(A \circ A^*)w = v$, l'élément $\tilde{u} := A^*w$ vérifie $(**)$: $A\tilde{u} = v$, donc $\tilde{u} \in S$, et $\tilde{u} \in Im\ A^*$; en conséquence $\tilde{u} = \hat{u}$.

■

7.4 Bases hilbertiennes

7.4.1 Définition et propriétés des bases hilbertiennes.

Soit $(H, <.,.>)$ un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H (l'ensemble d'indices I est souvent $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$). Cette famille est dite **orthogonale** lorsque

$$\forall i, e_i \neq 0 \text{ et } \forall i \neq j < e_i, e_j >= 0,$$

et **orthonormale** lorsque, de plus,

$$\forall i, \|e_i\| = 1 \text{ (définition déjà vue au Chapitre 1).}$$

Une famille orthogonale peut toujours être rendue orthonormale (il suffit de remplacer e_i par $\dfrac{e_i}{\|ei\|}$). Les vecteurs d'une famille orthogonale sont linéairement indépendants (c'est un exercice facile que de vérifier cela).
Etant donné une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, on appelle **i-ème coordonnée** de $u \in H$ (ou i-ème coefficient de FOURIER de $u \in H$) dans (ou par rapport à) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le réel

$$(***)\ \xi_i(u) :=< u, e_i >.$$

Proposition 7.4.1. *Inégalité de* BESSEL [2]
*Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **orthonormale** de l'**espace préhilbertien** réel $(H, <.,.>)$. Alors la série numérique de terme général $(\xi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$, et on a (pour tout $u \in H$) l'inégalité :*

$$(****)\ \sum_{n=0}^{\infty}[\xi_n(u)]^2 \leq \|u\|^2. \ [\textit{Inégalité de } \text{BESSEL}].$$

Démonstration

Soit N un entier > 0. Notons ξ_n le réel $\xi_n(u)$. On a :

$$\begin{aligned}\|u - \sum_{n=0}^{N}\xi_n e_n\|^2 &= \|u\|^2 - 2 < u, \sum_{n=0}^{N}\xi_n e_n > + \|\sum_{n=0}^{N}\xi_n e_n\|^2 \\ \text{(après développements)} &= \|u\|^2 - \sum_{n=0}^{N}\xi_n^2.\end{aligned}$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{N}\xi_n^2 \leq \|u\|^2.$$

On a tout ce qu'il faut pour affirmer ce qui est annoncé dans la Proposition (d'accord ?).

■

2. Friedrich BESSEL (1784-1846), de nationalité allemande; mathématicien géodésiste et surtout astronome.

Pour espérer avoir une égalité dans $(****)$, il faut que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit suffisamment "riche", qu'elle "remplisse tout H" par des combinaisons linéaires. C'est ce qui motive la définition suivante.

Définition 7.4.2. *Une* ***suite orthonormale*** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de l'espace préhilbertien* $(H, <.,.>)$ *est dite* ***base hilbertienne*** *de* H *(ou base orthonormale de* H*, en Physique on dit aussi système orthonormal complet de* H*) lorsque*

$$(*****)\ \overline{vect\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$$

(i.e., $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est une partie totale de* H*).*

Ce que dit $(*****)$ est, rappelons-le,

$$\overline{\{\sum_{i\in I} \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, I\ fini\}} = H.$$

Cette notion de base hilbertienne est **topologique** et non algébrique ou vectorielle (lorsque H est de dimension infinie) ; voir l'expression $(\heartsuit\heartsuit)$ ci-dessous (qui justifie l'appellation de "base"), la notion de "somme infinie" n'a aucun sens en Algèbre linéaire...

Théorème 7.4.3. *Fon-da-men-tal!*
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une* ***base hilbertienne*** *de l'****espace préhilbertien*** *réel* $(H, <.,.>)$*. Alors :*

1. *Pour tout* $u \in H$*, on a :*

$$(\heartsuit)\ \sum_{n=0}^{\infty} [<u, e_n>]^2 = \|u\|^2 \text{ [Egalité de PARSEVAL.[3]]}$$

2. *Pour tout* $u \in H$*, la série (d'éléments de* H*) de terme général* $\xi_n e_n =< u, e_n > e_n, n \in \mathbb{N}$*, est convergente et de somme* u *:*

$$(\heartsuit\heartsuit)\ u = \sum_{n=0}^{\infty} < u, e_n > e_n.$$ *[Série dite "****développement de*** u ***dans la base*** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$*"].*

3. *Pour tout* $u, v \in H$*, la série numérique de terme général* $\xi_n(u)\xi_n(v), n \in \mathbb{N}$ *est convergente et de somme* $< u, v >$ *:*

$$(\heartsuit\heartsuit\heartsuit)\ < u, v >= \sum_{n=0}^{\infty} < u, e_n > . < v, e_n > .$$

3. Marc-Antoine PARSEVAL (1755-1836), mathématicien français.

Démonstration

1. Soit $u \in H$, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est totale, il existe $v_\varepsilon = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ (où les λ_i sont réels, I fini) tel que $\|u - v_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.
Soit $V := vect\{e_i : i \in I\}$. V est un s.-e.v. de H, de dimension finie, donc complet ; l'opération de projection P_V sur V est donc licite (Chapitre 5, paragraphe 5.2.2).
Le vecteur $u - P_V(u)$ est orthogonal à V, donc à e_i pour tout $i \in I$:

$$\forall i \in I, < u - P_V(u), e_i >= 0,$$

soit : $\forall i \in I$, $< u, e_i >=< P_V(u), e_i >$.
Comme $P_V(u) = \sum_{i \in I} < P_V(u), e_i > e_i$ (on est d'accord ?), il s'ensuit :

$$P_V(u) = \sum_{i \in I} < u, e_i > e_i = \sum_{i \in I} \xi_i(u) e_i.$$

On a par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} \|u - P_V(u)\|^2 & = & \|u - \sum_{i \in I} \xi_i(u) e_i\|^2 \\ \text{(après développement)} & = & \|u\|^2 - \sum_{i \in I} [\xi_i(u)]^2 \\ & \leq & \varepsilon^2 \text{ [par définition de } v_\varepsilon]. \end{array}$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Bessel $(****)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\xi_n(u)]^2 \leq \|u\|^2 \leq \sum_{i \in I} [\xi_i(u)]^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} [\xi_n(u)]^2 + \varepsilon^2.$$

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \sum_{n=0}^{+\infty} [\xi_n(u)]^2 \leq \|u\|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} [\xi_n(u)]^2 + \varepsilon^2,$$

ce qui équivaut à l'égalité annoncée $(\heartsuit)$

[**1.** $\Rightarrow$ **2.**] Puisque $\sum_{n=0}^{N} [< u, e_n >]^2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \|u\|^2$ en croissant, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que : } N \geq N\varepsilon \Rightarrow 0 \leq \|u\|^2 - \sum_{n=0}^{N} [< u, e_n >]^2 \leq \varepsilon^2.$$

Par ailleurs,

$$\|u - \sum_{n=0}^{N} < u, e_n > e_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^{N} [< u, e_n >]^2 \text{ [toujours après le même type de calculs].}$$

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que : } N \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|u - \sum_{n=0}^{N} < u, e_n > e_n\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

On a bien démontré 2.

[**2.** $\Rightarrow$ **3.**] Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, pour tout entier $N > 0$:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=0}^{N} |\xi_n(u)||\xi_n(v)|\right]^2 &\leq \left\{\sum_{n=0}^{N} [\xi_n(u)]^2\right\}\left\{\sum_{n=0}^{N} [\xi_n(v)]^2\right\} \\ &\leq \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \dots\right\}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \dots\right\} = \|u\|^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

La série numérique de terme général $\big(\xi_n(u)\xi_n(v)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente (et même absolument convergente). Reste à calculer sa somme. Utilisons pour cela l'identité (de polarisation) :

$$\begin{aligned} < u, v > &= \frac{1}{2}[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} [\xi_n(u) + \xi_n(v)]^2 - [\xi_n(u)]^2 - [\xi_n(v)]^2\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(u)\xi_n(v). \end{aligned}$$

Exemple 7.4.4. *Soit $H = l^2(\mathbb{N})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ [1 à la n-ème place, 0 partout ailleurs]. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue une base hilbertienne de H (on s'en serait douté !), elle est appelée* ***base canonique*** *(ou naturelle, ou standard) de $l^2(\mathbb{N})$.*

Exemple 7.4.5. *Soit $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques ($T > 0$, $T = 2\pi$ par exemple). Le produit scalaire déjà utilisé maintes fois sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est*

$$< f, g > := \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Soit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (quantité appelée ***pulsation*** *ou* ***fréquence angulaire*** *ou* ***circulaire****, dans ce contexte).*
La suite de fonctions ($n \in \mathbb{N}^*$)

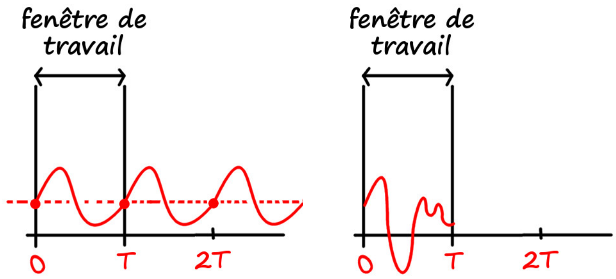
$$\begin{aligned} t \mapsto 1, \quad & t \mapsto \cos(\omega t), \ t \mapsto \sin(\omega t), \ ... \\ & t \mapsto \cos(n\omega t), \ t \mapsto \sin(n\omega t), \ ... \end{aligned}$$

est ***orthogonale*** *dans $\big(\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), < .,. > \big)$; on la rend orthonormale en "rectifiant le tir", sachant que $\|t \mapsto 1\|^2 = T$, $\|t \mapsto \cos(n\omega t)\|^2 = \|t \mapsto \sin(n\omega t)\|^2 = \dfrac{T}{2}$.*
Que cette suite donne bien lieu à une base hilbertienne n'est pas chose immédiate, c'est un théorème d'approximation de WEIERSTRASS *sous forme trigonométrique (cf. Chapitre*

3).
Considérer $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *revient à considérer* $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = f(T)$ *(is that clear ?). Or*

$$\{f \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}) : f(0) = f(T)\}$$

se trouve être dense dans $\big(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}), \|.\|_2\big)$, *où* $\|.\|_2$ *est la norme déduite de* $<.,.>$ *[le démontrer est un excellent petit exercice].*



$f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\qquad$ $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$

Donc, en fait, on a mis en évidence <u>*une base hilbertienne de* $\big(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}), <.,.>\big)$</u>.

(♡♡♡♡) *C'est la suite de fonctions :*

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{T}},\quad \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega t),\quad \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(\omega t),\ \ldots \quad \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega t),\quad \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega t),\ \ldots\ (n \in \mathbb{N}^*).}$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$,

$$(\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit)\quad \left\| f - \left\{ \sqrt{\frac{1}{T}}a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega.) + b_n\sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega.)\right]\right\}\right\|_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\begin{aligned}
\text{où}\quad a_0 &:=< f, \sqrt{\frac{1}{T}} >= \sqrt{\frac{1}{T}}\int_0^T f(t)dt,\\
a_n &:=< f, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega.) >= \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt\\
b_n &:=< f, \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega.) >= \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt\ \ (n \in \mathbb{N}^*).
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ *est partout dense dans* $L^2([0,T])$ *(cf. Cours sur l'intégration de* LEBESGUE*), ce qui a été mis en évidence en* (♡♡♡♡) *est* <u>*une base hilbertienne de* $L^2([0,T])$</u> *(appelée parfois base hilbertienne de* FOURIER*).*
<u>*Attention*</u>*! La convergence dans* (♡♡♡♡♡) *est au sens de* $\|.\|_2$, *elle n'est pas uniforme (faut pas rêver !), ni même simple (i.e. convergence en tout point de* $[0,T]$*). Toutefois pour les applications ou les interprétations, cette convergence en moyenne quadratique est tout à fait satisfaisante (*$\|f\|_2$ *est à un coefficient multiplicatif près l'****énergie*** *de* $f(t)$, *représentant l'amplitude en fonction de* t *d'un phénomène vibratoire).*
Il ne doit pas y avoir de difficulté à adapter ce qui a été présenté ci-dessus :
- *au cas d'une fenêtre de longueur* T, *autre que* $[0,T]$ *;*
- *au cas des fonctions à valeurs complexes.*

Ainsi, $\mathcal{C}\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],<.,.>\right)$ *où* $<f,g>:=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\overline{f(t)}g(t)dt$ *est un espace préhilbertien complexe dont le complété est* $L^2\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{C}\right)$.
La suite

$$\left\{e_n : t\mapsto e_n(t):=\sqrt{\frac{1}{t}}e^{\frac{2i\pi nt}{T}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{C}\right)$.

7.4.2 Existence de bases hilbertiennes.

Nous considérons ici le cas des espaces préhilbertienns **séparables** exclusivement, ce qui n'est pas très gênant pour les applications. On rappelle (Chapitre 3) que H est dit séparable s'il existe une partie dénombrable de H partout dense dans H.

Théorème 7.4.6. *(admis)*

1. *Tout espace préhilbertien réel* $(H,<.,.>)$ ***séparable*** *possède une base hilbertienne. Celle-ci est finie si* H *est de dimension finie, dénombrable (indexable par* $\mathbb{N}$*, donc), si* H *est de dimension infinie.*
2. *Un espace de Hilbert réel* $(H,<.,.>)$ ***séparable*** *est :*
   linéairement isométrique à l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$*, si dim* $H=n$ *;*
   linéairement isométrique à $(l^2(\mathbb{N}),\|.\|_2)$*, si dim* $H=+\infty$.

Ainsi, vite dit, un espace de Hilbert réel séparable est une "duplication" de $\mathbb{R}^n$ ou de $l^2(\mathbb{N})$.

Théorème 7.4.7. *Procédé d'orthogonalisation de* GRAM-SCHMIDT[4].
Soit $(H,<.,.>)$ *un espace préhilbertien réel, et soit* $e_0,e_1,...,e_n,...$ *des vecteurs de* H ***linéairement indépendants****. On pose pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*

$$V_n := vect\{e_0,e_1,...,e_n\}.$$

On définit une nouvelle suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs de* H *comme suit :*

$$(\square)\ f_0:=e_0, f_{k+1}:=e_{k+1}-P_{V_k}(e_{k+1}), k\in\mathbb{N}.$$

Alors :

1. *La famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale (i.e.* $f_i\perp f_j$ *dès que* $i\neq j$*) ;*
2. $V_n=vect\{f_0,f_1,...,f_n\}$.

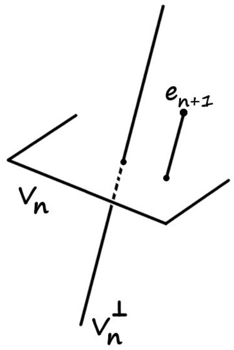
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déduite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT. Si l'on veut que la famille considérée soit orthonormale, on remplace f_n par $\frac{f_n}{\|f_n\|}, n\in\mathbb{N}$.

4. Erhard SCHMIDT (ou SCHMITT), mathématicien allemand (1876-1959) qui a étudié plus particulièrement la géométrie des espaces hilbertiens.

Démonstration du Théorème 7.4.7.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $f_0 = e_0$ engendre V_0, $\{f_0\}$ est une "famille" orthogonale.
- Supposons que $(f_0, f_1, ...f_n)$ constitue une base orthogonale de V_n, et démontrons que $(f_0, f_1, ..., f_n, f_{n+1})$ constitue une base orthogonale de V_{n+1}.
  V_n, de dimension finie, est complet : il est bien licite de projeter sur V_n. Comme $e_{n+1} \notin V_n$, $e_{n+1} - P_{V_n}(e_{n+1}) \neq 0$, et il vient de la caractérisation même de $P_{V_{n+1}}(e_{n+1})$ que $e_{n+1} - P_{V_n}(e_{n+1}) \in V_n^{\perp}$. Ce vecteur, dénommé f_{n+1}, étant dans $V_n^{\perp}$, il s'ensuit que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n, f_{n+1})$ est orthogonale dans V_{n+1}, donc libre. On a donc construit une base orthogonale de V_{n+1}.



■

<u>En pratique</u>, on procède comme suit :

> Supposons construits $f_0, f_1, ..., f_k$. On suppose $f_{k+1} := e_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i$, où les α_i sont des réels à déterminer ; pour cela on écrit
>
> $$< f_{k+1}, f_i >= 0 \text{ pour tout } i = 0, 1, ..., k.$$
>
> Ayant ainsi déterminé les α_i, donc f_{k+1}, on recommence pour f_{k+2}, etc.

Pour des révisions sur ces choses-là dans le contexte des espaces euclidiens, voir les exercices 5.29 à 5.35 de (l'excellent ouvrage (!))
J.-B. HIRIART-URRUTY et Y. PLUSQUELLEC, **Exercices d'Algèbre linéaire et bilinéaire**, Editions CEPADUES, 1989.

Exercice 7.4.8. <u>*Matrice et déterminant de* GRAM</u>[5].
Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(H, < .,. >)$. On désigne par $G(v_1, ..., v_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dite de GRAM*) dont le terme général est $< v_i, v_j >$.*

1. *Montrer :*

$$\left(\begin{array}{c} v_1, v_2, ..., v_n \textit{ sont} \\ \textit{linéairement indépendants} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\det G(v_1, ..., v_n) \neq 0 \right).$$

5. J. Pedersen GRAM (1850-1916), mathématicien danois. Avec SCHMIDT il constituait une fameuse deuxième ligne...

det $G(v_1,...,v_n)$ *est appelé le* ***déterminant de*** **Gram** ***associé à*** $v_1,...,v_n$.

2. *Montrer que si* $v_1,v_2,...,v_n$ *sont linéairement indépendants, en fait*

$$det\ G(v_1,...,v_n)>0.$$

3. *On suppose désormais que les* $v_1,v_2,...,v_n$ *sont linéairement indépendants, et on pose* $V_n:=vect\{v_1,v_2,...,v_n\}$. *Soit* $v\in H\setminus V_n$.

   a) *Montrer que la projection orthogonale* $P_{V_n}(v)$ *de* v *sur* v_n *s'exprime sous la forme* $P_{V_n}(v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$, *où* $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ *est solution du système linéaire suivant :*

$$G(v_1,...,v_n)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}<v,v_1>\\ <v,v_2>\\ \vdots\\ <v,v_n>\end{bmatrix}.$$

   b) *Déduire des calculs précédents :*

$$d^2_{V_n}(v)=\|v-P_{V_n}(v)\|^2=\frac{det\ G(v_1,...,v_n,v)}{det\ G(v_1,...,v_n)}.$$

Exemple 7.4.9. *Quelques familles de polynômes orthogonaux.*
La construction de familles de polynômes orthogonaux relève, dans le cadre des espaces préhilbertiens réels, d'une méthodologie unique. Soit I *un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$, *soit* $p:I\to\mathbb{R}_+$ *une fonction continue sur* I, *strictement positive sur* $\overset{\circ}{I}$ *et telle que* $\int_I |x^n|p(x)dx<+\infty$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *(p est appelée "**fonction-poids**"). On considère alors*

$$\mathcal{E}_p:=\Big\{f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R}):\int_I |f(x)|^2p(x)dx<+\infty\Big\},$$

que l'on structure en espace préhilbertien réel grâce au produit scalaire suivant :

$$(f,g)\in\mathcal{E}_p\times\mathcal{E}_p\mapsto<f,g>:=\int_I [f(x)g(x)]p(x)dx.$$

Comme $P_i:x\mapsto P_i(x)=x^i$ *est dans* $\mathcal{E}_p$ *pour tout* $i\in\mathbb{N}$, *on construit à partir de* $P_0,P_1,...,P_n,...$ *par la méthode d'orthogonalisation de* Gram-Schmidt *de nouveaux polynômes* $Q_0,Q_1,...,Q_n,...$ *orthogonaux pour* $<.,.>$. *De plus, on ne perd rien puisque*

$$\underbrace{vect\{P_0,P_1,...,P_n\}}_{\mathbb{R}_n[x]}=vect\{Q_0,Q_1,...,Q_n\}\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Suivant I *et la fonction-poids* p *sur* I, *on fabrique ainsi différentes familles de polynômes orthogonaux :*

Intervalle fermé I	*fonction-poids p*	*polynômes dits de*
$[-1,+1]$	*constante* >0	Legendre.
$[-1,+1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Tchebychev *de première espèce.*
$[-1,+1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Tchebychev *de deuxième espèce.*
$[0,+\infty[$	e^{-x}	Laguerre
$]-\infty,+\infty[$	e^{-x^2}	Hermite

mais il y en a bien d'autres !
Les polynômes orthogonaux servent dans la théorie et la pratique de l'Approximation, dans des calculs de Physique aussi. C'est aussi une véritable tarte à la crème pour les sujets d'examens et concours...
Si I est borné, la suite $\left(\frac{Q_n}{\|Q_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{E}_p$.
C'est encore vrai pour le contexte LAGUERRE *ou* HERMITE *présenté dans le tableau au-dessus.*
$(\mathcal{E}_p, < .,. >)$ n'est pas complet, son complété serait l'espace de LEBESGUE *$L^2_\mu(I)$, où μ désigne la mesure $d_\mu(t) = p(t)dt$. On a ainsi mis en évidence une base hilbertienne de $L^2_\mu(I)$.*

7.4.3 Projection sur le sous-espace engendré par les premiers éléments d'une base hilbertienne.

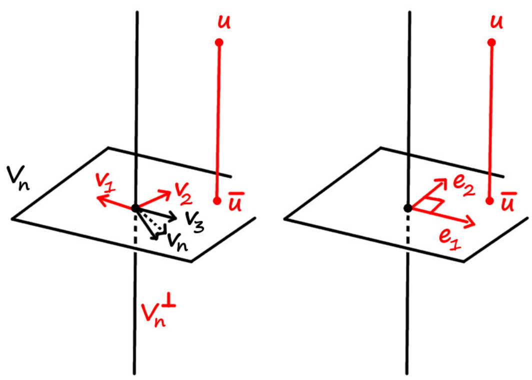
Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel, soit $v_1, ..., v_n$ n vecteurs de H et $V_n := vect\{v_1, ..., v_n\}$. On sait que l'opération de projection sur V_n est licite et que $P_{V_n}(u)$ est caractérisé de la manière suivante :

$$\left(\overline{u} = P_{V_n}(u)\right) \Leftrightarrow (\overline{u} \in V_n \text{ et } u - \overline{u} \in V_n^\perp).$$

On exploite le fait que $u - \overline{u}$ soit orthogonal à V_n en disant, de manière équivalente, que :

$$(\square\square) < u - \overline{u}, v_i >= 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., n.$$

Cela conduit généralement au calcul explicite de $\overline{u} = P_{V_n}(u)$ (plusieurs exemples seront traités en séances de T.D.).



Supposons à présent que $(v_1, ..., v_n)$ constitue une famille orthonormale (les premiers éléments d'une base hilbertienne de H par exemple, ou obtenus par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT à partir d'une base non orthonormale).
Peut-on alors avoir un forme explicite de $P_{V_n}(u)$? Le théorème qui suit, dont la démonstration a pratiquement été faite lors de celle du Théorème 7.4.3. apporte une réponse positive à cette question.

Théorème 7.4.10. *Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une **famille orthonormale** de $(H, < .,. >)$, soit $V_n := vect\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Alors :*

1. $P_{V_n}(u) = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i$,
2. $d^2_{V_n}(u) = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(< u, e_i >)^2$.

Le "modèle" $\mathbb{R}^n$ équipé du produit scalaire usuel $< ., . >$ et de la base canonique $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est là pour conforter l'idée que les résultats de ce théorème n'ont rien de surprenant.

Démonstration du Théorème 7.4.10.

On sait que $P_{V_n}(u)$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.
Ecrivons que $u - P_{V_n}(u)$ est orthogonal à V_n, c'est-à-dire à $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$< u - P_{V_n}(u), e_k >= 0 \text{ pour tout } k = 1, 2, ..., n.$$

Cela conduit à :

$$< u, e_k >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < e_i, e_k >= \alpha_k,\ k = 1, 2, ..., n.$$

D'où l'expression annoncée de $P_{V_n}(u)$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} d^2_{V_n}(u) &= \|u - P_{V_n}(u)\|^2 = \|u - \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i\|^2 - 2 < u, \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i. \end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'ensuit du fait qu'en raison de l'orthogonalité de la famille $\{e_1, ..., e_n\}$,

$$\|\sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(< u, e_i >)^2.$$

■

Les espaces préhilbertiens ou de Hilbert sont les espaces fondamentaux pour les applications de l'Analyse à la Physique et aux Sciences de l'ingénieur. L'Analyse hilbertienne abordée dans ce Cours pourrait se prolonger par :

- L'étude de la topologie faible sur un espace de Hilbert (voir Chapitre 3 pour l'un des problèmes posés à ce sujet), qui doit conduire à des résultats du style : Soit $(u_n)_n$ une suite bornée d'un espace de Hilbert séparable ($\|u_n\| \leq K$ pour tout n) ; on peut alors en extraire une sous-suite faiblement convergente ($u_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} u$).
- L'étude des opérateurs (éléments de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$) dits compacts (on dit aussi complètement continus) et la théorie spectrale (valeurs propres, vecteurs propres, etc.) qui va avec.

– La recherche de bases hilbertiennes de $L^2_\mu(I)$ appropriées : systèmes de Haar, de Walsh, "ondelettes" en Théorie et traitement du signal.
– etc.

mais, à chaque jour suffit sa peine... Le Cours est terminé.

Ouf !

Références

Il existe des m^3 de références sur les sujets traités dans ce Cours ; allez les consulter dans la section dédiée de la BU.
Nous nous contenterons d'en signaler un, particulièrement soigné et pédagogique ; le présent document s'en est d'ailleurs inspiré.
Y. Sonntag, **Topologie et analyse fonctionnelle. Cours de Licence avec 240 exercices et 30 problème corrigés.** Editions Ellipses (1998).

JBHU conduisant ses étudiant-e-s vers des sommets...