## Le théorème des accroissements finis, encore et encore...

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY
Université PAUL SABATIER de Toulouse
http ://www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/

**Résumé.** Nous présentons une démonstration du théorème des accroissements finis (ou de la valeur moyenne) différente de celle habituelle qui consiste à utiliser deux résultats d'Analyse de base : la maximisation d'une fonction continue sur $[a, b]$, le fait que la dérivée de $f$ s'annule en un point maximiseur ou minimiseur de $f$ situé à l'intérieur de $[a, b]$. La méthode alternative, baptisée "à la POMPEIU" car c'est lui qui précisa de manière moderne ce genre d'approche, repose sur deux autres résultats d'Analyse élémentaire : le théorème des segments emboîtés ou des suites adjacentes, la définition d'une dérivée en un point via deux suites "chevauchant" ce point.

**Abstract. The mean value theorem, again and again...**
We present a proof of the so-called theorem of increments (or of the mean value theorem) different from the usual one which consists in using two results of basic Analysis : the maximization of a continuous function on $[a, b]$, the fact that the derivative of $f$ vanishes at a maximizing or minimizing point of $f$ located in the interior of $[a, b]$. The alternative method, called "à la POMPEIU", because it was he who proposed this kind of approach in a modern way, is based on two other results of elementary Analysis : the theorem of nested segments or adjacent sequences, the definition of a derivative in a point via two sequences "straddling" this point.

**Mots-clés.** Théorème des accroissements finis, Théorème de la valeur moyenne. Théorème des segments emboîtés. Définition de la dérivée d'une fonction.

**2010 Mathematics Subject Classification** : 26A

### Introduction

S'il y a bien des théorèmes centraux en Analyse réelle élémentaire (domaine répértorié parfois sous le vocable de Calculus), ce sont le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) pour les fonctions continues, et le théorème des accroissements finis (TAF) pour les fonctions dérivables. Le premier (TVI) a été l'objet d'un de nos articles récents ([9]) dans lequel nous illustrons son utilisation dans des questions de géométrie plane ; nous en ferons également usage dans cette note. Le deuxième (TAF) n'en est pas moins important, il fait partie de nos résultats d'Analyse élémentaire favoris ; nous lui avons consacré deux notes récentes ([7, 8]). Il est curieux de voir combien les étudiants invoquent ce théorème, d'une manière incantatoire parfois : "Appliquons le TAF" ai-je vu souvent sur des copies d'examen [1]. Ce théorème, appelé aussi de LAGRANGE, ou encore, pour des raisons claires, "de la valeur moyenne" (TVM), même si, en osant un jeu de mots "sa valeur n'est pas moyenne", est démontré presque toujours de la même façon, que nous rappelerons plus loin. Notre but dans la note présente est de proposer une autre façon de le démontrer, en s'appuyant sur des résultats et méthodes différents de la méthode classique. La méthodologie n'est pas nouvelle, elle est due sous une forme modernisée au mathématicien roumain D. POMPEIU il y a plus d'un siècle, mais insuffisamment connue à notre goût, même si une revue comme *American Math. Monthly* en parle de temps en temps ([1, 5, 10]).

**1. La méthode habituelle**

Rappelons le resultat qui est l'objet de notre attention (le TAF, ou théorème de la valeur moyenne, ou de LAGRANGE).

*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$. *Alors il existe* $c \in\, ]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

La méthode habituelle pour le démontrer est comme suit :

- Supposons tout d'abord que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in\, ]a, b[$ en lequel $f$ est maximisée ou minimisée sur $[a, b]$, c'est-à-dire

$$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ ou bien } f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x). \tag{2}$$

C'est la *continuité* de $f$ sur le segment $[a, b]$ qui est l'hypothèse qui a permis cela. Ensuite, $c$ étant à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$, la relation (2) induit nécessairement que $f'(c) = 0$. C'est la fameuse règle (ou condition nécessaire d'optimalité) de FERMAT. Ici, c'est l'hypothèse de *dérivabilité* de $f$ sur $]a, b[$ qui a été utilisée.

- Pour une fonction $f$ qui ne vérifie pas $f(a) = f(b)$, on "rectifie le tir" en proposant la fonction

$$x \mapsto \widehat{f}(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On a fait ce qu'il fallait pour avoir $\widehat{f}(a) = \widehat{f}(b)$ $(= f(a))$. De plus, la continuité de $f$ sur $[a, b]$ induit celle de $\widehat{f}$ sur $[a, b]$, et la dérivabilité de $f$ sur $]a, b[$

1. Encore que dans le langage familier TAF signifie "Travail à faire"...

implique celle de $\widehat{f}$ sur $]a,b[$ , avec

$$\widehat{f}'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ pour tout } c \in \,]a,b[\,. \tag{3}$$

Retenons de cette manière de faire les faits suivants :

- Il suffit de démontrer le TAF dans le contexte suivant : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, $f(a) = f(b)$. Il faut exhiber un $c \in \,]a,b[$ en lequel $f'(c) = 0$. C'est ledit théorème de ROLLE.

- Les points $c \in \,]a,b[$ répondant à la question posée sont obtenus par maximisation ou minimisation (globale) de $f$ sur $[a,b]$ (*cf.* (2)).

**2. La méthode des cordes, ou à la** POMPEIU

Rappelons notre objectif. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, $f(a) = f(b)$. Il faut exhiber un $c \in \,]a,b[$ en lequel $f'(c) = 0$. L'idée ici est de démontrer l'existence d'un tel $c$ d'une manière différente de celle détaillée au-dessus, quitte à ce que ce $c$ ne soit pas forcément un maximiseur ou minimiseur de $f$ sur $[a,b]$. La nouvelle façon de faire est due, à des variantes près, à D. POMPEIU ([11]) et redécouverte ou commentée à intervalles réguliers depuis ([1, 2, 3, 4, 5, 10]). Voici, avant une présentation formelle, l'idée conductrice de la méthode. Il s'agit de construire une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$, intérieurs à $[a,b]$ (c'est crucial), dont la longueur tend vers 0. Il faudra s'assurer ensuite que la dérivée de $f$ s'annule bien au point-limite commun $c$ des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

L'essentiel est de décrire la manière de construire la suite des intervalles $[a_n, b_n]$, et c'est là qu'il peut y avoir des variantes. Nous proposons ici la procédure telle que décrite dans [10] .

- *Construction de la suite d'intervalles emboîtés* $[a_n, b_n]$ .

Pour alléger les notations, nous prenons $[a,b] = [0,1]$ ; ce sera notre intervalle de départ $[a_0, b_0] = [0,1]$. Considérons la fonction $g : x \in [0, 1/2] \mapsto g(x) = f(x+1/2) - f(x)$. Cette nouvelle fonction est continue sur $[0, 1/2]$, avec $g(0) = -\,g(1/2)$ (puisque $f(0) = f(1)$). Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc d'affirmer qu'il existe $\overline{a} \in [0, 1/2]$ tel que $g(\overline{a}) = 0$, soit

$$f(\overline{a} + 1/2) = f(\overline{a}). \tag{4}$$

Le nouvel intervalle proposé est $[a_1, b_1] = [\overline{a}, \overline{a} + 1/2]$. On réitère le processus avec, au départ maintenant, $f : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$, puis $g : x \in [a_1, b_1 + 1/4] \mapsto g(x) = f(x + 1/4) - f(x)$. On obtient un nouveau point $\widetilde{a} \in [a_1, b_1 + 1/4]$ tel que $g(\widetilde{a}) = 0$, soit

$$f(\widetilde{a} + 1/4) = f(\widetilde{a}).$$

Le nouvel intervalle proposé est $[a_2, b_2] = [\widetilde{a}, \widetilde{a} + 1/4]$.

*Remarque importante.* Le premier intervalle obtenu $[a_1, b_1]$ est contenu dans $]0, 1[$ si $f(1/2) \neq f(0)$. Si $f(1/2) = f(0)$ $(= f(1))$, il se peut que $[a_1, b_1] = [0, 1/2]$, comme c'est le cas, par exemple, pour $f(x) = \sin(2\pi x)$. Qu'à cela ne tienne, au coup suivant, on aura un intervalle $[a_2, b_2]$ contenu dans $]0, 1/2[$ dès lors que $f(1/4) \neq f(0)$. Si $f(1/4) = f(0)$ $(= f(1/2))$, on choisit $[a_2, b_2] = [1/4, 1/2]$ plutôt que $[0, 1/4]$. A partir de là, il n'y aura plus d'ennuis de ce genre.

On construit ainsi une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
[a_n, b_n] &\subset \; ]0, 1[ \text{ pour tout } n \geqslant 2; \\
f(b_n) &= f(a_n) \text{ et } b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } n.
\end{aligned}$$

En conséquence, les suites adjacentes $(a_n)$ et $(b_n)$ ont une même limite $c \in \, ]0, 1[$. Il reste à vérifier que $f'(c) = 0$.

- *Démontrons que* $f'(c) = 0$.

Là nous sommes sauvés par le fait que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ "chevauchent" $c$. En effet, si $a_n < c < b_n$,

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \left( \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \right) + \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} \left( \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \right),$$

d'où, puisque $f(b_n) - f(a_n) = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{c} - f'(c) = \left[ \frac{f(c)-f(a_n)}{c-a_n} - f'(c) \right] \theta_n + \left[ \frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c} - f'(c) \right] (1 - \theta_n) \\ \text{avec } \theta_n = \frac{c-a_n}{b_n-a_n} \in \, ]0, 1[ \, . \end{array} \right. \tag{5}$$

L'inégalité triangulaire permet d'en déduire :

$$|- f'(c)| \leqslant \left| \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - f'(c) \right| + \left| \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - f'(c) \right|. \tag{6}$$

Dans le cas très particulier où $c = a_n$ ou $b_n$, le membre de droite dans (5) ne contient qu'un seul terme, et l'inégalité (6) qui s'ensuit est une trivialité. Dans tous les cas, de par la définition même de la dérivabilité de $f$ en $c$, il vient d'un passage à la limite dans l'inégalité (6) que $f'(c) = 0$.

*Remarques finales.* - Le choix de 1/2 comme longueur des intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ n'a rien de spécifique. Grâce à un joli résultat de P. Lévy (1934), appelé "théorème des cordes universelles", on aurait pu construire des intervalles emboîtés de longueur 1/3 ou 1/4... où $1/n$ ($n \neq 0$ entier naturel quelconque). La suite de la démonstration eût été la même.

- La démonstration à la POMPEIU du théorème de ROLLE (ou TVM) est vraiment différente de celle habituelle, au sens suivant : dans la méthode habituelle (*cf.* §1), les points $c \in ]a,b[$ en lesquels $f'(c) = 0$ sont obtenus comme maximiseurs ou minimiseurs globaux (ou absolus) de $f$ sur $[a,b]$ ; dans l'approche à la POMPEIU (*cf.* §2), ils peuvent être autres, des minimiseurs locaux par exemple. Illustration avec la fonction $f : x \in [-2,2] \mapsto f(x) = (x^2-1)^2$. Dès la première itération, la méthode des cordes horizontales conduit à l'intervalle $[-1,1]$. Ensuite, pour $n \geqslant 2$, $[a_n, b_n] = \left[-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Les points $c$ du théorème de ROLLE obtenus par la méthode classique sont $c = -1$ et $c = 1$ ; la méthode alternative conduit au point $c = 0$.

- Dit sous forme ensembliste, le TVM affirme que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \{f'(c) : c \in ]a,b[\} = \mathcal{D}. \tag{7}$$

En fait, on peut être un peu plus précis : Mis à part le cas où $f$ est une fonction affine sur $[a,b]$ (auquel cas l'ensemble des dérivées $\mathcal{D}$ ci-dessus est réduit à un point), on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in int(\mathcal{D}). \tag{8}$$

D'autres résultats viennent ensuite en complément, par exemple : $\mathcal{D}$ est un intervalle (théorème de G. DARBOUX (1875)), ou bien l'ensemble

$$\Delta = \left\{ \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} : a \leqslant a' < b' \leqslant b \right\}$$

des quotients différentiels de $f$ est un intervalle qui a la même adhérence que $\mathcal{D}$ ; de fait

$$\Delta \subset \mathcal{D} \subset \overline{\Delta}.$$

Tout cela est fort classique, voir ([6, Vol.1, Tapa 123]) par exemple. Ainsi, une dérivée (un élément de $\mathcal{D}$) peut se trouver à la frontière de $\Delta$ sans être un quotient différentiel (un élément de $\Delta$). POMPEIU ([11, Première note, § 3]) avait déjà noté que si $f'$ est minimisée ou minimisée en $\overline{c}$ , alors la dérivée $f'(\overline{c})$ ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient différentiel $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}$. Exemple avec : $f : x \in [-1,1] \mapsto f(x) = x^3$ et $\overline{c} = 0$.

**3. Quelques mots de l'extension aux fonctions à valeurs vectorielles**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, soit $X : [a,b] \to E$ vérifiant les deux propriétés suivantes : $X$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

La première chose que l'on apprend à propos de l'extension du TVM à ce contexte est qu'il n'existe pas nécessairement de point $c \in \, ]a,b[$ tel que $\frac{X(b)-X(a)}{b-a} = X'(c)$, pas plus d'ailleurs qu'un point $c \in \, ]a,b[$ vérifiant la relation plus faible $\left\| \frac{X(b)-X(a)}{b-a} \right\| = \|X'(c)\|$. Un contre-exemple simple est $X : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $X(t) = (\cos t, \sin t)$ ; un cycliste, dont le mouvement est régi par $X(t)$, peut partir du point $A = (1,0)$ du plan à l'instant $t_0 = 0$ et y revenir à l'instant $t_f = 2\pi$ sans que sa vitesse $X'(t)$ ne soit jamais nulle.

Il y a alors deux options : soit on tient à des TVM sous forme d'*égalités*, auquel cas il faut plusieurs points $c_i \in \, ]a,b[$ pour pouvoir exprimer la valeur moyenne $\frac{X(b)-X(a)}{b-a}$ à l'aide des $X'(c_i)$ (voir [7, Section 3] par exemple), soit on se contente d'*inégalités* sous forme de majorations de $\left\| \frac{X(b)-X(a)}{b-a} \right\|$ à l'aide de $\|X'(c)\|, c \in \, ]a,b[$ . Continuons sur cette deuxième voie.

La forme la plus rustre du TVM est alors :

$$\left\| \frac{X(b)-X(a)}{b-a} \right\| \leqslant \sup_{c \in ]a,b[} \|X'(c)\| . \tag{9}$$

C'est ce qui est enseigné dans les cours de Calcul différentiel de niveau L3 (Licence de mathématiques). Elle est suffisante pour les premières applications qu'on en a à faire, par exemple : Si $\|X'(c)\|$ est majorée par $L$ sur $]a,b[$, alors $X$ est lipschitzienne sur $[a,b]$ avec $L$ comme constante de Lipschitz ; $X$ est constante sur $[a,b]$ dès lors que $X'$ est nulle sur $]a,b[$ .

Mais il y a mieux à faire. En effet, le résultat le plus fin sur le TVM sous forme d'inégalités est le suivant :

$$\textit{Il existe } c \in \, ]a,b[ \textit{ tel que } \left\| \frac{X(b)-X(a)}{b-a} \right\| \leqslant \|X'(c)\| . \tag{10}$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, nous présentons ici, succinctement, deux manières de démontrer cette inégalité (10).

### 3.1 La méthode usuelle

Soit $\ell$ une forme linéaire continue sur $E$. On "scalairise" la fonction à valeurs vectorielles $X$ en considérant $\ell \circ X : t \mapsto \ell\,[X(t)]$. C'est une fonction à valeurs réelles cette fois-ci, avec $(\ell \circ X)' = \ell \circ X'$.

Pour un vecteur $u \neq 0$ de $E$, nous ne choisissons pas n'importe quelle forme linéaire continue $\ell$ mais celle, $\ell^*$, de norme égale à 1, pour laquelle $\ell(u) = \|u\|$. Ce choix est possible : c'est un résultat d'Analyse fonctionnelle, conséquence du théorème de Hahn-Banach, qui permet cela. Dans le cas d'un espace de Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$ on représente $\ell^*$ de la manière suivante : $\ell^*(.) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, . \right\rangle$. Dans le cas qui nous occupe, $u = \frac{X(b)-X(a)}{b-a}$. On choisit donc

$\ell^*$ de sorte que

$$\ell^* \left[ \frac{X(b) - X(a)}{b-a} \right] = \left\| \frac{X(b) - X(a)}{b-a} \right\|. \tag{11}$$

Le plus dur est maintenant fait. On applique le TAF à la fonction à valeurs réelles $\ell^* \circ X$ : il existe $c^* \in ]a, b[$ tel que

$$\ell^* \left[ \frac{X(b) - X(a)}{b-a} \right] = \ell^* \left[ X'(c^*) \right].$$

Il n'y a plus qu'à utiliser (11), sachant que $|\ell^* [X'(c^*)]| \leqslant \|\ell^*\| . \|X'(c^*)\| = \|X'(c^*)\|$.

**3.2 Une approche à la** Pompeiu ([2, 3])

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, l'approche consiste à construire une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{c} [a_n, b_n] \subset ]a, b[ \text{ pour tout } n \,; \\ \left\| \frac{X(b)-X(a)}{b-a} \right\| \leqslant \left\| \frac{X(b_n)-X(a_n)}{b_n-a_n} \right\| \leqslant \left\| \frac{X(b_{n+1})-X(a_{n+1})}{b_{n+1}-a_{n+1}} \right\| \text{ pour tout } n; \\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0. \end{array} \right.$$

La suite de la démonstration est analogue à celle pour les fonctions à valeurs réelles : les suites adjacentes $(a_n)$ et $(b_n)$ ont une limite commune $c \in ]a, b[$ ; l'inégalité (6), transcrite avec des normes, produit le même effet à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{X(b_n) - X(a_n)}{b_n - a_n} \right\| = \|X'(c)\|.$$

Certes il y a un peu de travail pour construire de tels $[a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n = \frac{b-a}{3^n}$ ([2, p. $258-260$]), c'est encore la continuité de $X$ sur $[a, b]$ qui sert pour cela ; mais on évite ainsi de faire appel à des théorèmes plus avancés comme celui de Hahn-Banach. Voyons rapidement comment on procède.

Soit $a = 0$ et $b = 1$ pour simplifier. On découpe $[0, 1]$ en 3 intervalles égaux, de sorte que l'inégalité triangulaire induit :

$$\|X(1) - X(0)\| \leqslant \|X(1/3) - X(0)\| + \|X(2/3) - X(1/3)\| + \|X(1) - X(2/3)\|.$$

Par suite,

$$\|X(1) - X(0)\| \leqslant \left\| \frac{X(1/3) - X(0)}{1/3} \right\| \tag{12}$$

ou bien

$$\|X(1) - X(0)\| \leqslant \left\| \frac{X(2/3) - X(1/3)}{1/3} \right\|$$

ou bien

$$\|X(1)-X(0)\| \leqslant \left\| \frac{X(1)-X(2/3)}{1/3} \right\|.$$

Quatre possibilités sont à considérer à présent.

*1er cas.* Celui où

$$\|X(1)-X(0)\| = \left\| \frac{X(1/3)-X(0)}{1/3} \right\| = \left\| \frac{X(2/3)-X(1/3)}{1/3} \right\| = \left\| \frac{X(1)-X(2/3)}{1/3} \right\|.$$

On choisit alors $a_1 = \frac{1}{3}$ et $b_1 = \frac{2}{3}$.

*2ème cas.* Celui où $\|X(1)-X(0)\| < \left\| \frac{X(1/3)-X(0)}{1/3} \right\|$ (inégalité stricte dans (12)). La fonction $q : t \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \mapsto q(t) = \left\| \frac{X(t+1/3)-X(t)}{1/3} \right\|$ est telle que $\lim_{t\to 0} q(t) = q(0) = \left\| \frac{X(1/3)-X(0)}{1/3} \right\|$. En conséquence, il existe $a_1 \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$ tel que $\|X(1)-X(0)\| < q(a_1)$. On choisit cet $a_1$, puis $b_1 = a_1 + \frac{1}{3}$.

*3ème et 4ème cas.* Ceux où $\|X(1)-X(0)\| < \left\| \frac{X(2/3)-X(1/3)}{1/3} \right\|$ ou bien $\|X(1)-X(0)\| < \left\| \frac{X(1)-X(2/3)}{1/3} \right\|$. Ils se traitent exactement comme dans le premier cas, *mutatis mutandis.*

En résumé, dans tous les cas possibles, on a construit $[a_1, b_1] \subset ]0,1[$ tel que $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}$ et $\|X(1)-X(0)\| < \left\| \frac{X(b_1)-X(a_1)}{1/3} \right\|$ ; c'était bien l'objectif de la première étape de la démonstration.

**4. Notice historico-bibliographique**

Pour des résultats mathématiques un peu anciens, il est souvent difficile de dire de manière précise "qui a fait quoi", car il y a des préversions, des énoncés corrects mais des démonstrations incomplètes ou erronées, etc. Pour une étude historique un peu fouillée du sujet (théorème des accroissements finis, théorème de la valeur moyenne), nous renvoyons à l'ouvrage de Flett ([4]), pages $54-67$.

La méthode habituelle de démonstration du théorème des accroissements finis (*cf.* §1) est due à O. Bonnet (mentionné dans un cours de Serret en 1868). La méthode par les cordes (*cf.* §2) prend racine dans des travaux du physicien Ampère ; elle a été redécouverte depuis à intervalles réguliers sous une forme plus ou moins semblable. Mais c'est Pompeiu ([11]) qui l'a publiée dans sa forme moderne, du moins pour les fonctions à valeurs réelles. Comme cela a déjà été dit, l'extension au cas des fonctions à valeurs vectorielles apparaît dans les articles de Aziz et Diaz ([2, 3]).

Dimitrie Pompeiu $(1873-1954)$ est un mathématicien roumain, formé en France, qui fut professeur à l'université de Jassy (ou Iasi), de Cluj, puis à celle de Bucarest. Sa thèse de Doctorat ès Sciences, soutenue à Paris sous la direction de H. POINCARÉ, fut publiée en 1905 aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* POMPEIU est un analyste, spécialisé dans les fonctions de la variable complexe. Il publiait essentiellement en français. Un ouvrage collectant ses travaux, édité en 1959, cité en [11], peut se trouver dans des bibliothèques universitaires françaises. Le "théorème des accroissements finis" était un domaine de prédilection de POMPEIU, pas moins de huit contributions listées dans l'ouvrage de collection cité plus haut contiennent ces termes dans le titre. Par ailleurs, il y a une variante du théorème de la valeur moyenne qui porte son nom (voir [6, Vol. 2, Tapa 1]).

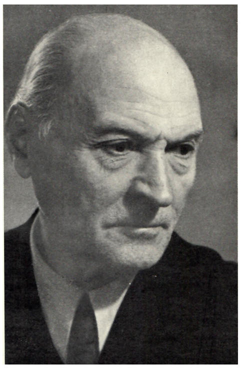

Photo de D. POMPEIU

**Epilogue**

La méthode de démonstration à la POMPEIU n'est pas plus, ou moins, directe (resp. simple, élégante, etc.) que la méthode habituelle, elle est tout simplement différente. Et comme elle fait appel à des tours de main qui sont autres, c'est donc une bonne occasion de la présenter et d'en faire un outil d'apprentissage des techniques de l'Analyse réelle de base.

**Références**

1. A. ABIAN, *An ultimate proof of Rolle's theorem.* American Math. Monthly (June-July 1979), 484 – 485.

2. A.K. AZIZ and J.B. DIAZ, *On a mean value theorem of the differential calculus of vector-valued functions, and uniqueness theorems for ordinary differential equations in linear normed spaces.* Contributions to Differential Equations, Vol. 1 (1963), 251 – 269.

3. A.K. AZIZ and J.B. DIAZ, *On Pompeiu's proof of the mean value theorem of the differential calculus of real-valued functions.* Contributions to Differential Equations, Vol. 1 (1963), 467 – 481.

4. T.M. FLETT, *Differential analysis.* Cambridge University Press (1980).

5. I. Halperin, *A fundamental theorem of the calculus*. American Math. Monthly (1954), 122 – 123.

6. J.-B. Hiriart-Urruty, *Mathematical Tapas, Vol. 1* (2016), Vol. *2* (2017). Springer Undergraduate Mathematics Series.

7. J.-B. Hiriart-Urruty, *Mean value theorems and convexity : an example of cross-fertilization of two mathematical items*. A paraître dans Elemente Der Mathematik.

8. J.-B. Hiriart-Urruty, *Sensitivity of the "intermediate point" in the mean value theorems : an approach via the Legendre-Fenchel transform.* A paraître (2020).

9. J.-B. Hiriart-Urruty et P. Lassère, *Le changement dans la continuité : applications du théorème des valeurs intermédiaires à des problèmes géométriques du plan.* A paraître dans Au fil des maths-Bulletin de l'APMEP, n°536 (2020).

10. H. Samelson, *On Rolle's theorem*. American Math. Monthly (June-July 1979), 486.

11. D. Pompeiu, *Sur le théorème des accroissements finis* (*Deux notes*). Ann. Sci. Université Jassy, Vol. 3 et 4 (1906), ou encore :

D. Pompeiu, Opera Mat., Editura Academiei Republicii Populare Române (1959), 62 – 76.