Sinusite : diagnostic, caractérisation, traitements...

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Institut de Mathématiques
Université Paul Sabatier de Toulouse
E-mail : jbhu@math.univ-toulouse.fr

www.math.univ-toulouse.fr/ ˜jbhu/

Résumé

Le *sinus* est un mot qui signifie en français au moins deux choses : une partie de l'anatomie de notre tête (sinus de la face), ou bien une fonction mathématique bien standard. La racine étymologique est la même, c'est "un pli, un méandre". Dans la présente note, nous allons revisiter sous différents aspects la fonction mathématique sinus, ou sa compagne la fonction cosinus, avec comme point d'orgue deux caractérisations bien surprenantes, celle de H. Delange et celle de J. Roe.

1. Les tout débuts, au collège puis au lycée

C'est habituellement lors d'enseignements de mathématiques en classes de collèges que les adolescents sont confrontés à ce que sont le sinus et le cosinus d'un angle. C'est en étudiant le triangle (qu'on pourrait d'ailleurs appeler aussi trigone) qu'ils y sont conduits, d'où l'appellation qui s'ensuit de *fonctions trigonométriques*. La visualisation sur un cercle-unité (c'est-à-dire de rayon 1) de ce que représente l'angle θ (qui est aussi la longueur du morceau de cercle vu sous cet angle) et la valeur $\sin(\theta)$ sont ensuite au coeur du dispositif d'apprentissage et de mémorisation de ces notions. Au début, c'est un tracé de la fonction point par point qui est suggéré, en mettant en évidence les valeurs particulières prises pour des angles ($\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, etc.). Plus tard, en classes de lycées, la fonction sinus est vue dans sa totalité et un traceur graphique montre son graphe bien lisse, appelée sinusoïde... Dans les applications (en Physique et Mécanique par exemple), elle apparaît dès qu'on évoque des phénomènes d'oscillation ou de vibration. Bref, c'est une fonction mathématique absolument centrale.

Sinus ou cosinus ? Comme l'indique son nom, co-sinus, cosinus une fonction "qui va avec sinus", comme le seraient des colocataires dans un appartement ou des colistiers dans une élection... Les deux, sinus et cosinus, sont les enfants de l'exponentielle complexe, mais c'est une filiation que nous n'évoquerons pas ici. Un simple décalage dans les variables permet de passer de sinus à cosinus et inversement, par exemple :

$$\cos(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}-x) \ ; \qquad (1)$$

$$-\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(x). \qquad (2)$$

Ce passage de l'une à l'autre des fonctions par un simple décalage est illustré par la structure des bancs publics suivants, que j'ai observés sur les bords du Danube à Budapest.

Figure 1. Bancs sinus-cosinus

Après ce premier diagnostic d'existence et d'observation de sinus, la question que nous abordons est celle des caractérisations de cette fonction... Il en existe plusieurs, nous avons jeté notre dévolu sur quatre d'entre elles : via les équations différentielles, à l'aide de séries, au travers du calcul variationnel, et enfin par le bornage de toutes les dérivées d'ordre supérieur. Mais commençons par une construction "pratique" de ce qu'est le sinus.

2. La sinusoïde avec du papier et des ciseaux

Prenons un cylindre de papier dont la base est un cercle et coupons-le par un plan "de biais", c'est-à-dire qui ne soit ni contenant l'axe central du cylindre ni perpendiculaire à celui-ci. Apparaît ainsi une courbe d'intersection, que les plus avancés des lecteurs ont reconnu être une ellipse, mais passons. Déroulons ensuite le cylindre pour obtenir une courbe plane. Quelle est alors la courbe obtenue ? Eh bien, il s'agit d'une sinusoïde. Voyons cela.

On rapporte l'espace $\mathbb{R}^3$ à un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, où $\left(O; \overrightarrow{k}\right)$ est l'axe du cylindre et, sans perte de généralité, on suppose que le plan de coupe passe par l'origine O. Le plan a alors pour équation cartésienne $z = ax + by$. Comme on a voulu éviter que le plan soit horizontal, les coefficients a et b ne sont pas simultanément nuls. Quitte à faire une rotation autour de l'axe vertical $\left(O; \overrightarrow{k}\right)$, on peut même s'arranger pour que dans le nouveau repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ ainsi obtenu après rotation, le plan de coupe soit tout simplement d'équation $z = ky$, avec $k \neq 0$. A l'aide de l'équation du cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ (sans perdre en généralité, on a choisi 1 comme rayon du cercle de base du cylindre), on obtient qu'un point quelconque de la courbe-intersection (du cylindre et du plan de biais) a pour coordonnées :

$$x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), z = k\sin(\theta), \text{ où } \theta \text{ balaye le segment } [0, 2\pi]. \qquad (3)$$

Une fois le cylindre déroulé, on obtient un point d'abcisse $X = \theta$ (c'est justement l'effet souhaité du déroulement) et d'ordonnée $Y = z = k\sin(\theta)$. Ainsi, l'abcisse X décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$ alors que $Y = k\sin(X)$.

Voilà donc une façon simple de faire apparaître la fonction *sinus*.

3. La fonction sinus à l'aide des équations différentielles

La fonction sinus se trouve être la seule fonction f vérifiant :

$$f''(x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R};\ f(0) = 0; f'(0) = 1. \qquad (4)$$

Ainsi, à partir de $f = \sin$, les fonctions dérivées d'ordre pair voient apparaître, au signe près, la fonction sinus ; pour les dérivées d'ordre impair, c'est le compère cosinus qui s'en charge. Ainsi, toutes les dérivées d'ordre supérieur sont bornées par une même valeur, à savoir 1 :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout entier } n \geqslant 0. \qquad (5)$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette propriété au paragraphe 6.

Une autre manière de dire la même chose qu'en (4) est comme suit, en utilisant les fonctions vectorielles (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) et la dérivation d'ordre 1 seulement : la fonction vectorielle $\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}$ est la seule fonction dérivable $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ échangeant en quelque sorte les dérivées des fonctions-composantes, $f' = g$ et $g' = -f$, et vérifiant $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$.

4. La fonction sinus à l'aide des séries

4.1 Avec les séries de Taylor ou séries entières

A un stade plus avancé des études de mathématiques, disons au niveau Bac + 2, l'Analyse permet de définir les fonctions sinus et cosinus à partir de sommes de séries, sans aucune référence à la géométrie du triangle. La définition de $\sin(x)$ proposée est la suivante :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (6)$$

Cette manière de procéder, faisant d'une certaine façon table rase du passé collèges-lycées, suppose une étude au préalable du "père" des enfants sinus et cosinus, à savoir l'exponentielle d'un nombre complexe. On peut ensuite "dérouler" à partir des définitions et montrer par exemple qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $\cos(r) = 0$, et tel que $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in]0, r[$. S'ensuivront des encadrements de r, tout cela pour arriver à définir ex nihilo (ou presque) $\pi = 2r$.

4.2 Avec les séries de FOURIER

Les développements en séries de FOURIER sont une autre occasion d'exprimer la fonction sinus en fonctions d'autres (en sinus et cosinus). Bien sûr, le développement de $\sin(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ ne pose pas de problème puisqu'il est tout développé ! Plus intéressant, et plus surprenant pour l'étudiant qui le découvre, est le fait qu'il soit possible de développer $\sin(x)$ en somme d'une série ne comportant exclusivement que des... cosinus. Prenons en effet $\sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$ et complétons-le par $-\sin(x)$ pour $x \in [-\pi, 0]$ (c'est-à-dire qu'on considère $|\sin(x)|$ sur $[-\pi, \pi]$). Le développement en série de FOURIER de cette fonction paire ne comportera que des cosinus ; cela conduit à :

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{4p^2 - 1} \text{pour tout } x \in [0, \pi]. \tag{7}$$

D'expérience, nous pouvons assurer que cela interloque la majorité des étudiants... Cet exemple sert aussi à illustrer le fait que c'est la connaissance d'une fonction sur un intervalle de longueur 2π qui conduit à un développement unique en série de FOURIER des fonctions "usuelles". Contrairement à ce qui se passe pour les développements en séries entières, connaître la fonction f sur "un (petit) bout" de la droite réelle ne suffit pas pour un développement en série de FOURIER. On peut ainsi compléter la fonction $\sin(x)$, $x \in [0, \pi]$, de différentes façons sur $[-\pi, 0]$ et obtenir autant d'expressions différentes du style de celle de (7). C'est un peu la magie des séries de FOURIER.

5. La fonction sinus comme solution unique de problèmes variationnels

Par le qualificatif de "variationnel"on sous-entend "en minimisant quelque chose"... La fonction sinus peut en effet apparaître comme la seule fonction minimisant un certain critère (ou coût, ou objectif) parmi une famille de fonctions f vérifiant des contraintes spécifiques. Ces critères sont définis par des intégrales de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$ ou $[0, 2\pi]$, et les contraintes portent sur les valeurs aux bords de f ou f'. Donnons-en quatre exemples, adaptés des résultats figurant dans [4].

Théorème 1.

1°) *La fonction sinus est la seule minimisant le critère*

$$\mathcal{I}_1(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([f'(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) \, dx \tag{8-1}$$

sur l'ensemble-contrainte des fonctions $f \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ *vérifiant :*

$$f(0) = 0, f'(0) = 1. \tag{9-1}$$

2°) *La fonction sinus est la seule minimisant le critère*

$$\mathcal{I}_2(f) = \int_0^{\pi} \left([f'(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) \, dx \tag{8-2}$$

sur l'ensemble-contrainte des fonctions $f \in C^1([0,\pi])$ *vérifiant :*

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ et } f(\pi) = 0. \tag{9-2}$$

3°) *La fonction sinus est la seule minimisant le critère*

$$\mathcal{I}_3(f) = \int_0^{2\pi} \left([f'(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) \, dx \tag{8-3}$$

sur l'ensemble-contrainte des fonctions $f \in C^1([0,2\pi])$ *vérifiant :*

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 0. \tag{9-3}$$

4°) *La fonction sinus est la seule minimisant le critère*

$$\mathcal{I}_4(f) = \int_0^{\pi} \left([f''(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) \, dx \tag{8-4}$$

sur l'ensemble-contrainte des fonctions $f \in C^2([0,\pi])$ *vérifiant :*

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ et } f(\pi) = 0. \tag{9-4}$$

Démonstration. Comme souvent en pareille situation, on utilise pour les démonstrations la méthodologie des développements en séries de Fourier. Détaillons quelque peu le 2°) cas seulement.

Comme $\mathcal{I}_2(\sin) = 0$, le résultat précédent peut se reformuler en : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ vérifiant (9-2), on a

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 \, dx \leqslant \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx, \tag{10}$$

avec égalité uniquement lorsque $f = \sin$.

Soit donc $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ vérifiant $f(0) = 0, f'(0) = 1$ et $f(\pi) = 0$. On la prolonge à $[-\pi,\pi]$ par imparité, puis à toute la droite réelle par 2π-périodicité. La fonction résultante, appelée encore f, est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, largement ce qu'il faut pour appliquer le théorème de Dirichlet :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

où les b_n sont les coefficients de FOURIER (réels) idoines.
Plus intéressant est ce que nous permet la relation de PARSEVAL sur f *et* f' :

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2; \tag{12}$$

$$\int_0^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n^2. \tag{13}$$

On a utilisé pour cela le fait que sur $[-\pi, \pi]$, f est impaire, f' est paire, ainsi que les relations : $a_n(f') = nb_n(f), b_n(f') = -na_n(f)$ (ce qui a été rendu possible puisque $f(0) = f(\pi) = 0$).

L'inégalité (10) est clairement vérifiée, avec égalité uniquement lorsque $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. La condition $f'(0) = 1$ permet alors de conclure que seule la fonction $f = \sin$ est solution de notre problème de minimisation avec contraintes.

Remarques.
- Le résultat du 3°) est une manifestation de l'inégalité de WIRTINGER (voir Exercice 67 dans [1] par exemple).
- Dans le même ordre d'idées, la fonction sinus hyperbolique (notée sh) peut apparaître comme solution unique de problèmes variationnels. Par exemple (voir Exercice 85 dans [1]), on a le théorème ci-après.

Théorème 2. *La fonction sinus hyperbolique est la seule minimisant le critère*

$$\mathcal{I}_5(f) = \int_0^1 \left([f'(x)]^2 + [f(x)]^2 \right) \, dx \tag{14}$$

sur l'ensemble-contrainte des fonctions $f \in C^1([0, 1])$ *vérifiant :*

$$f(0) = 0, f(1) = sh(1). \tag{15}$$

La situation ici est même plus simple à étudier puisque le critère $\mathcal{I}_5$ est une fonction convexe de f.

6. Les surprenantes caractérisations de H. DELANGE et J. ROE

6.1 La caractérisation de DELANGE (1967)

Parmi les caractérisations de la fonction sinus, celle qui va suivre est vraiment surprenante ; nous avouons avoir été bluffés lorsque nous en avons pris connaissance et continuons à l'être depuis. Elle est due au mathématicien français HUBERT DELANGE [2] . Considérons les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout entier } n \geqslant 0. \tag{16}$$

Après tout, c'est comme si nous disposions d'un tableau avec une bande limitée, dans laquelle doivent être tracées la fonction f et toutes ses dérivées $f^{(n)}, n \geqslant 1$. Y a-t-il des fonctions vérifiant (16) ? Oui, bien sûr... à commencer par la fonction identiquement nulle, ainsi que les translatées de toute fonction vérifiant (16) (si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ vérifie la condition (16), il en est de même de la fonction $f_c : x \mapsto f(x-c)$, où c est une constante réelle). Ou encore : si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ vérifie (16), la fonction $f_a : x \mapsto f(ax)$ la vérifie également dès lors que $|a| < 1$. On va donc imposer à f deux conditions supplémentaires :

$$f(0) = 0; \tag{17}$$
$$f'(0) = 1. \tag{18}$$

Nous avons alors la caractérisation que voici.

Théorème 3. (H. Delange). *La seule fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ vérifiant :*

$$f'(0) = 1 \tag{19-1}$$

et

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout entier } n \geqslant 0. \tag{19-2}$$

est la fonction sinus.

Le moment de surprise passé, reprenons nos esprits et voyons :
- il n'a pas été nécessaire de mettre $f(0) = 0$ en hypothèse ; bref, les autres conditions sur f imposent que $f(0) = 0$;
- plus surprenant et fort : les seules contraintes imposées sur f en hypothèses forcent sa 2π-périodicité ! D'ailleurs, si on impose seulement $f'(0) > 0$ au lieu de (19-1), on n'a plus nécessairement la périodicité de f...

La démonstration du théorème de Delange ne saurait être simple ni courte ; elle dépend aussi, comme souvent en mathématiques, des outils et résultats dont on dispose avant de l'aborder. Pour des démonstrations accessibles, nous renvoyons le lecteur aux deux références [6] et [8, page 302]. Mais, puisque nous étions en train de travailler avec les développements en séries de Fourier, contentons-nous d'une démonstration pour les fonctions 2π-périodiques. C'est ce qui est fait par exemple dans ([5] , Exercice 227) .

Notons, pour k entier relatif, $c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt$ le coefficient (complexe) de Fourier d'indice k de la fonction g. La comparaison des coefficients c_k de Fourier des fonctions f et $f^{(n)}$ est licite ici (puisque f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$) ; ainsi

$$c_k(f^{(n)}) = (ik)^n c_k(f) \text{ pour tout } k \text{ entier relatif et } n \text{ entier positif.}$$

Avec la définition des coefficients $c_k(f)$, $c_k(f^{(n)})$ et de la majoration $\left|c_k(f^{(n)})\right| \leqslant 1$ déduite de l'hypothèse (19-2), il vient

$$|c_k(f)| \leqslant \frac{1}{|k|^n},$$

et ce, pour tout entier relatif $k \neq 0$ et tout entier positif n. Pour $k \geqslant 2$ on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $c_k(f) = 0$. La fonction f est donc nécessairement de la forme $f(x) = c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} = A\cos(x) + B\sin(x) + C$. On conclut ensuite grâce aux conditions imposées suivantes : $f'(0) = 1; |f(x)| \leqslant 1$ et $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; la seule possibilité résultante est $B = 1, A = 0$ et $C = 0$.

Commentaires.

- La moralité de cette histoire concerne le rôle caché des dérivées d'ordre supérieur d'une fonction. Si le rôle de $f'(x)$ (= pente de la tangente au graphe de f en $(x, f(x))$, la vitesse en Cinématique) et celui de $f''(x)$ (= concavité ou convexité de f, l'accélération en Cinématique) sont bien palpables, celui des dérivées $f^{(n)}$, pour $n \geqslant 3$, est plus difficile à appréhender. La dérivée troisième f''' est le "coup brusque" ("snap" en anglais), le changement dans l'accélération (c'est-à-dire dans la force exercée, selon les lois de la Mécanique), c'est ce qui fait mal si vous subissez un choc avec votre véhicule... Au-delà, les choses sont plus difficiles à imaginer et visualiser. Examinons par exemple arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ fort sympathique qui pourraît être candidate à vérifier les conditions de majorations de $\left|f^{(n)}(x)\right|$ uniformément en $x \in \mathbb{R}$. Or, il n'en est rien puisque

$$\arctan^{(2p+1)}(0) = \pm\,(2p)!$$

Cet exemple atteste que le comportement violent des dérivées d'ordre supérieur peut se concentrer au point 0.

- La rigidité de l'hypothèse (19-2) vient aussi de l'exigence "*pour tout $x \in \mathbb{R}$*". Comme cela arrive souvent en mathématiques, il suffirait de relâcher à peine la condition requise pour que tout tombe à l'eau. Dans l'exemple présent, considérons l'ouvert $\mathcal{O}$ consistant en $\mathbb{R}$ privé du seul point 0, et revoyons le Théorème 3 avec $\mathcal{O}$ au lieu de $\mathbb{R}$: comme fonction $f \in C^\infty(\mathcal{O})$ vérifiant :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1 \textit{ pour tout } x \in \mathcal{O} \textit{ et tout entier } n \geqslant 0,$$

il y a $f(x) = \exp(-|x|)$.

6.2 La caractérisation de Roe (1980)

Voisine dans l'esprit mais différente de celle de Delange est la caractérisation de John Roe [7]. En voici l'explicitation. Partant d'une fonction indéfiniment dérivable $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

- on dérive successivement f_0, de manière à obtenir f', f'',... ,$f^{(n)}$, etc. [on va ainsi dans le sens des entiers positifs] ;
- on primitive successivement f_0, de manière à obtenir $f^{(-1)}$, $f^{(-2)}$,... ,$f^{(-n)}$, etc. [on va ainsi dans le sens des entiers négatifs].

Il résulte de cette construction une suite de fonctions $(f^{(n)})_n$, indexée par les entiers relatifs, pour laquelle :

$$\text{Pour tout entier relatif } n, \text{ la dérivée de } f^{(n)} \text{ est } f^{(n+1)}.$$

Voici à présent une nouvelle caractérisation des fonctions sin et cos.

Théorème 4. (ROE) *Supposons que pour la suite (doublement) infinie* $(f^{(n)})_n$ *construite à partir de* $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ *comme au-dessus, on ait la propriété de majoration suivante : il existe une constante* M *telle que*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout entier } n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{20}$$

Alors, il existe deux constantes C *et* φ *telles que*

$$f_0(x) = C \sin(x + \varphi). \tag{21}$$

Une autre manière d'écrire est : $f_0(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, avec A et B réels. L'ajout à (20) des contraintes $f_0(0) = 0$ et $f_0'(0) = 1$ conduit à la seule fonction sinus.

Un affaiblissement de la condition de majoration (20) est possible, il est dû à R. HOWARD [3] ; il consiste à majorer $\left|f^{(n)}(x)\right|$ en $M_n(1 + |x|)^p$, où les $M_n > 0$ vérifient des conditions (de croissance) appropriées quand $n \to \pm\infty$.

Conclusion

Après avoir revu une construction et des définitions basiques de la fonction sinus, nous en avons présenté diverses caractérisations, dont celles surprenantes de DELANGE et ROE. Il en existe d'autres, sous forme de solutions d'équations fonctionnelles par exemple, mais elles n'ont pas la force et l'effet de surprise de celles exposées ici.

Remerciements

Je remercie PATRICE LASSÈRE et VINCENT FEUVRIER, fidèles relecteurs de ce genre de présentations mathématiques, pour les remarques qu'ils ont pu faire sur la première version de la présente note.

Références

[1] D.AZÉ & J.-B. HIRIART-URRUTY, *Analyse variationnelle et Optimisation.* Editions Cépaduès (2010).

[2] H.DELANGE, *Caractérisations des fonctions circulaires.* Bull. Sc. Math. 91 (1967), 65-73.

[3] R.HOWARD, *A note on Roe's characterization of the sine function.* Proc. of the Amer. Math. Society, vol. 105, n°3 (1989), 658-663.

[4] KY FAN, O.TAUSSKY & J.TODD, *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger.* Monatshefte für Mathematik, vol. 59, n°2 (1955), 73-90.

[5] P.LASSÈRE, *"Petit" bestiaire d'exercices de mathématiques avec leur corrigé, à l'usage de l'oral voire de l'écrit de certains concours (Agrégation externe, interne & Capes).* Publication interne de l'université PAUL SABATIER (2008).

[6] *Réponse collective à la question n° 500.* Revue de la filière mathématique (ex-Revue de Mathématiques Spéciales), vol. 116, n°3 (2005-2006), 105-112.

[7] J.Roe, *A characterization of the sine function,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87 (1980), 69-73.
[8] J.Saint-raymond, Topologie, calcul différentiel et variable complexe. Editions Calvage & Mounet (2008).