Revue des Math. de l'Ens. Supérieur (ex-RMS)
N°s 3-4 (2000), pp. 455-460.

Sur un air de Rolle and Rolle

D. Azé*   J.-B. Hiriart-Urruty†

Université Paul Sabatier de Toulouse

Résumé

Soit $f : \bar{B}(0,r) \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur la boule fermée $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur la boule ouverte $B(0,r)$. Le Théorème de ROLLE affirme ceci : si $E = \mathbb{R}^n$ et si f s'annule sur la frontière de $B(0,r)$, alors il existe $\bar{x} \in B(0,r)$ en lequel la différentielle de f est égale à 0. Nous proposons dans cette note deux résultats dans la même lignée :

- Il n'est pas possible d'avoir un théorème de Rolle du type de celui évoqué ci-dessus lorsque E est un espace de HILBERT de dimension infinie.
- Il est possible d'avoir un "théorème de ROLLE approché" lorsque l'on a seulement $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tous les x sur la frontière de $B(0,r)$.

Introduction

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; si $f(a) = f(b)$, on est alors assuré de l'existence de $c \in]a,b[$ en lequel la dérivée de f s'annule. Cet énoncé, qui porte le nom de "théorème de ROLLE" est l'un des résultats les plus spectaculaires de l'Analyse des fonctions numériques de la variable réelle et -doit-on l'avouer- un de nos théorèmes favoris. Lorsque f est à valeurs vectorielles, mettons $\mathbb{R}^2$, le résultat ne subsiste plus et, tout enseignant de Calcul différentiel insiste, contre-exemples à l'appui, sur ce distinguo. Signalons tout de même qu'il existe dans ce cas un théorème de ROLLE permettant d'exprimer (exactement et pas seulement majorer la norme de) $f(b) - f(a)$ à l'aide de dérivées de f en des points c_i de $]a,b[$; voir [8] à ce sujet.

L'interprétation cinématique des deux résultats évoqués ci-dessus est frappante et plaît assez aux étudiants. Supposons qu'un lanceur (eh oui on est à Toulouse !) parte à la verticale du point A et y revienne, tout en restant à la verticale de A : la vitesse instantanée est alors nécessairement nulle en un instant t. Cela peut avoir lieu en plusieurs instants si, par un retour de flamme, le lanceur repart (toujours à la verticale) ; voir Fig. 1. b.

*aze@mip.ups-tlse.fr
†jbhu@cict.fr

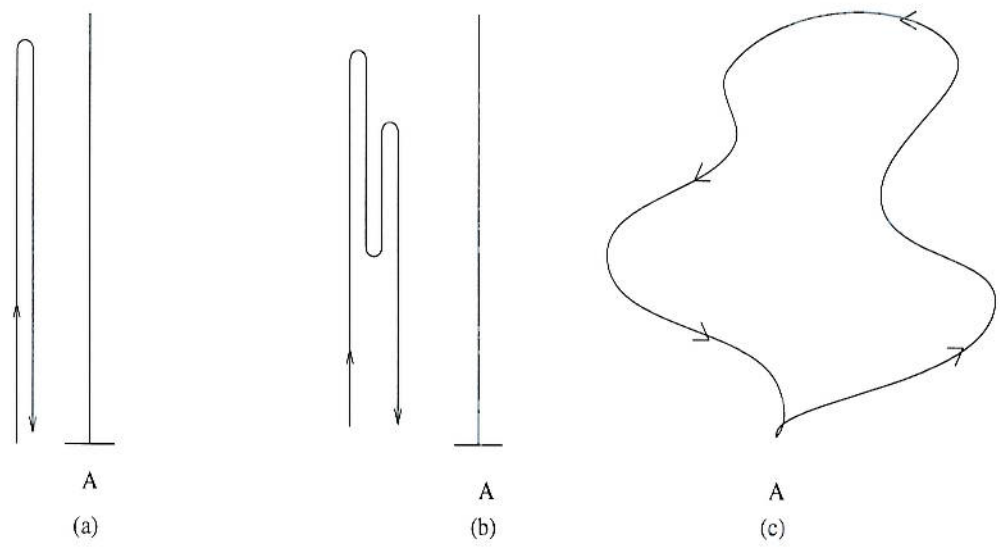

Fig. 1

Par contre, une voiture peut faire tout le tour de Toulouse par le périphérique (sans feux tricolores) sans que sa vitesse s'annule un seul instant ; voir Fig. 1. c.

Le théorème de ROLLE (pour les fonctions à valeurs réelles) est presque toujours démontré de la même façon : la fonction continue f présente un minimum ou un maximum en un point c de $]a, b[$, et comme f y est dérivable, $f'(c)$ doit être nul (règle de FERMAT). Il y a néanmoins moyen de démontrer ce résultat par une approche radicalement différente, c'est la " méthode POMPEIU" ([3, 9]) : on construit de manière itérative une suite décroissante de segments $[a_n, b_n]$, avec $a_n - b_n \to 0$, finissant en un point c où la dérivée de f s'annule. La démonstration est vraiment différente au sens où le point c ainsi obtenu n'est pas nécessairement un minimiseur ou maximiseur de f sur $[a, b]$.

Et si f est une fonction numérique de plusieurs variables ?

Considérons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard noté $\langle\cdot,\cdot\rangle)$, et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $f : \bar{B}(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur la boule fermée $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur la boule ouverte $B(0,r)$. Si $f(x) = 0$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$, il existe alors $\bar{x} \in B(0,r)$ tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ ($\nabla f(\bar{x})$ désigne le vecteur gradient de f en $\bar{x}$). La démonstration est calquée sur celle pour les fonctions de la variable réelle : f étant continue sur le compact $\bar{B}(0,r)$, elle y est bornée et atteint ses bornes ; puisque f est nulle sur la frontière de $\bar{B}(0,r)$, il y a nécessairement un point $\bar{x}$ à l'intérieur de $\bar{B}(0,r)$ qui minimise ou maximise f sur $\bar{B}(0,r)$; la fonction f ayant été supposée différentiable sur $B(0,r)$, la règle de FERMAT s'applique : $\nabla f(\bar{x}) = 0$ nécessairement.

À ce stade une question se pose : l'argument utilisé, et notamment le rôle joué par la compacité de $\bar{B}(0,r)$, est-il là pour profiter au mieux de la dimension finie de E, ou bien, pourrait-on trouver trouver une démonstration de substitution qui permettrait de passer au cas où E est de dimension infinie? Nous verrons dans la section 1 qu'il n'en est rien : le théorème de ROLLE, tel qu'il est énoncé, ne s'étend pas au cas où E est un espace de HILBERT de dimension infinie.

Une deuxième question, tout aussi naturelle, est la suivante: si $f : \bar{B}(0,r) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur $B(0,r)$, et si $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$, est-il vrai qu'il existe $\bar{x}$ à l'intérieur de $\bar{B}(0,r)$ en lequel $\|\nabla f(\bar{x})\|$ est "petit" (un "petit" s'exprimant en fonction de ε et de r)? Nous verrons dans la section 2 un tel "théorème de ROLLE approché".

1 Le théorème de ROLLE tombe en défaut en dimension infinie

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de HILBERT réel de dimension infinie, soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur H et s'annulant sur la sphère unité de H. Il est alors faux de dire qu'il existe $\bar{x}$ vérifiant $\|\bar{x}\| \leq 1$ tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Plusieurs contre-exemples illustrant ce propos existent dans la littérature ([10, 6]) ; celui que nous présentons ci-dessous nous paraît le plus simple, il est tiré de [10]. Soit $H := L^2([0,1])$ (espace de LEBESGUE des (classes) de fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$), et soit A l'endomorphisme continu de H défini par: pour tout $x \in H$, $[A(x)](t) := tx(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. On introduit la fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = t(1-t)$ pour tout $t \in [0,1]$, et l'on pose, pour tout $x \in H$

$$f(x) := (1 - \|x\|^2)g(x).$$

où $g(x) := \langle A(x), x \rangle + 2\langle \varphi, x \rangle + \frac{4}{27}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f \equiv 0$ sur $S_H := \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Commençons par remarquer que $g(x) > 0$ pour tout $x \in H$. En effet, soit $x \in S_H$ donné et $\lambda \in \mathbb{R}$; on a :

$$g(\lambda x) = \lambda^2 \langle A(x), x \rangle + 2\lambda \langle \varphi, x \rangle + \frac{4}{27}.$$

Utilisant le fait que $\varphi(t) < \sqrt{\frac{4t}{27}}$ pour tout $t \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3}\}$, il vient

$$(\langle \varphi, x \rangle)^2 < \Big(\int_0^1 \sqrt{\frac{4}{27}}\, |x(t)| \sqrt{t}\, dt, \Big)^2$$

d'où :

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} g(\lambda x) = \frac{4}{27} - \frac{(\langle \varphi, x \rangle)^2}{\langle A(x), x \rangle} > \frac{4}{27} - \Big(\int_0^1 \sqrt{\frac{4}{27}}\, |x(t)| \sqrt{t}\, dt \Big)^2 \Big(\int_0^1 |x(t)|^2 t\, dt \Big)^{-1} \geq 0.$$

Comme $g(0) > 0$, il en résulte donc bien que $g(x) > 0$ pour tout $x \in H$.

On a aussi :

$$\nabla f(x) = 2(1 - \|x\|^2)(A(x) + \varphi) - 2(\langle A(x), x \rangle + 2\langle \varphi, x \rangle + \frac{4}{27})x. \tag{1}$$

S'il existe $x \in H$ avec $\|x\| < 1$ tel que $\nabla f(x) = 0$, il existe donc $\mu > 0$ tel que $A(x) + \varphi = \mu x$, ce qui implique $x(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\mu - t}$ presque partout sur $[0,1]$, d'où $\mu > 1$ car $x \in L^2([0,1])$. Revenant à (1), il vient

$$\Big(1 - \int_0^1 \frac{\varphi(t)^2}{(\mu - t)^2}\, dt\Big)\mu x = \Big(\int_0^1 \Big(\frac{\varphi(t)^2 \mu}{(\mu - t)^2} + \frac{\varphi(t)^2}{\mu - t}\Big)\, dt + \frac{4}{27}\Big)x.$$

Comme $\nabla f(0) \neq 0$, on a $x \neq 0$, ce qui conduit à

$$\mu = \Lambda(\mu) + \frac{4}{27},$$

avec

$$\Lambda(\mu) = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)^2(3\mu - t)}{(\mu - t)^2}\, dt.$$

La fonction Λ étant décroissante sur $[1, +\infty[$, on a $\sup_{\mu \geq 1} \Lambda(\mu) = \Lambda(1) = \dfrac{3}{4}$. Il en résulte que $\mu = \Lambda(\mu) + \dfrac{4}{27} \leq \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{27} < 1$, ce qui est impossible.

2 Un théorème de ROLLE approché

Nous présentons ici un "théorème de ROLLE approché", adapté de [4], et que nous avons eu l'occasion de tester dans un examen de Calcul différentiel.

Théorème 2.1 *Soit $f : \bar{B}(0,r) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur $B(0,r)$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$. Il existe alors $\bar{x} \in B(0,r)$ tel que $\|\nabla f(\bar{x})\| \leq \dfrac{\varepsilon}{r}$.*

Le résultat est optimal au sens que l'on ne peut faire mieux que $\dfrac{\varepsilon}{r}$ pour la majoration de $\|\nabla f(\bar{x})\|$. Soit en effet $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x \rangle$, où $a \in \mathbb{R}^n$ est de norme égale à $\dfrac{\varepsilon}{r}$. On a bien $|f(x)| \leq \varepsilon$ dès que $\|x\| = r$ (cela résulte de l'inégalité de CAUCHY-BOUNIAKOWSKI-SCHWARZ), tandis que $\|\nabla f(\bar{x})\| = \|a\| = \dfrac{\varepsilon}{r}$ en tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration du théorème. On introduit la fonction auxiliaire $g : \bar{B}(0,r) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) := \dfrac{\|x\|^2}{r^2} - \left[\dfrac{f(x)}{\varepsilon}\right]^2$. La fonction g est continue sur le compact $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur la boule ouverte $B(0,r)$. On a :

$$\mu := \min_{x \in \bar{B}(0,r)} g(x) \leq g(0) = -\left[\frac{f(0)}{\varepsilon}\right]^2 \leq 0; \tag{2}$$

$$\nabla g(x) = 2\left[\frac{x}{r^2} - \frac{f(x)}{\varepsilon^2}\nabla f(x)\right] \text{ pour tout } x \in B(0,r). \tag{3}$$

Supposons comme premier cas que $\mu = 0$. Alors, d'après (2), $g(0) = f(0) = 0$ et, de par la définition de g et μ, $\dfrac{|f(x)|}{\varepsilon} \leq \dfrac{\|x\|}{r}$ pour tout $x \in \bar{B}(0,r)$. On en déduit $\dfrac{\langle \nabla f(0), d\rangle}{\varepsilon} \leq \dfrac{\|d\|}{r}$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, d'où $\|\nabla f(0)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{r}$.

Supposons à présent que $\mu < 0$. Comme $g(x) = 1 - \left[\dfrac{f(x)}{\varepsilon}\right]^2 \geq 0$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$, la fonction g est minimisée en un point $\bar{x} \in B(0,r)$; ainsi $g(\bar{x}) = \mu$ et $\nabla g(\bar{x}) = 0$. Il s'ensuit avec l'expression (3) de $\nabla g(\bar{x})$:

$$\frac{\bar{x}}{r^2} - \frac{f(\bar{x})}{\varepsilon^2}\nabla f(\bar{x}) = 0. \tag{4}$$

Par suite

$$\frac{[f(\bar{x})]^2}{\varepsilon^4}\|\nabla f(\bar{x})\|^2 = \left\|\frac{\bar{x}}{r^2}\right\|^2 = \frac{1}{r^2}\left\{\mu + \left[\frac{f(\bar{x})}{\varepsilon}\right]^2\right\} \leq \frac{1}{r^2\varepsilon^2}[f(\bar{x})]^2.$$

Comme $f(\bar{x}) \neq 0$ (sinon on aurait $\bar{x} = 0$ et donc $\mu = 0$, ce qui a été exclu), il vient finalement $\|\nabla f(\bar{x})\|^2 \leq \dfrac{\varepsilon^2}{r^2}$. ∎

Et si à nouveau l'espace sous-jacent de travail est de dimension infinie ?

Là, les techniques de démonstration doivent être à nouveau repensées, et le résultat le plus fin que nous connaissions dans cette direction est le suivant.

Théorème 2.2 *[2] Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de* HILBERT *réel, soit $f : \bar{B}(0,r) \subset H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée sur $\bar{B}(0,r)$ et différentiable sur $B(0,r)$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x vérifiant $\|x\| = r$. Il existe alors $\bar{x} \in B(0,r)$ tel que $\|\nabla f(\bar{x})\| \leq \dfrac{2\varepsilon}{r}$.*

3 En guise de conclusion provisoire

Le théorème de ROLLE, bien que fort ancien et bien établi dans l'Analyse des fonctions réelles, continue à susciter un florilège de questions et interprétations, y compris par des mathématiciens chercheurs professionnels ([1, 7] par exemple). Le cas des fonctions de la variable complexe est différent, il mérite un traitement à part ([8, section 3], [5]).

Références

[1] A. ABIAN, *An ultimate proof of* ROLLE*'s theorem*, Amer. Math. Monthly (1979), 484-485.

[2] D. AZAGRA, R. DEVILLE, *Subdifferential* ROLLE*'s and mean value inequalities theorem*, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), 312-329.

[3] A.K. AZIZ, J.B. DIAZ, *On* POMPEIU*'s proof of the mean value theorem*, in Contributions to Differential Equations, 1 (1963), 467-481.

[4] D. BORWEIN, A. MEIR, *A property of gradients*, Amer. Math. Monthly (1969), 648-649.

[5] J.CL. EVARD, F. JAFARI, *A complex* ROLLE*'s theorem*, Amer. Math. Monthly (1992), 858-861.

[6] J. FERRER, ROLLE*'s theorem fails in* ℓ_2, Amer. Math. Monthly (1996), 161-165.

[7] M. FURI, M. MARTELLI, *A multidimensional version of* ROLLE*'s theorem*, Amer. Math. Monthly (1995), 243-249.

[8] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Théorèmes de valeur moyenne sous forme d'égalité pour les fonctions à valeurs vectorielles*, Revue de Mathématiques Spéciales, 7 (1983), 287-293.

[9] H. SAMUELSON, *On* ROLLE*'s theorem*, Amer. Math. Monthly (1979), 486.

[10] S.H. SHKARIN, *On* ROLLE*'s theorem in infinite dimensional* BANACH *spaces*, traduit de Matematicheskie Zametki, Vol. 51, n° 3 (1992), 128-136.