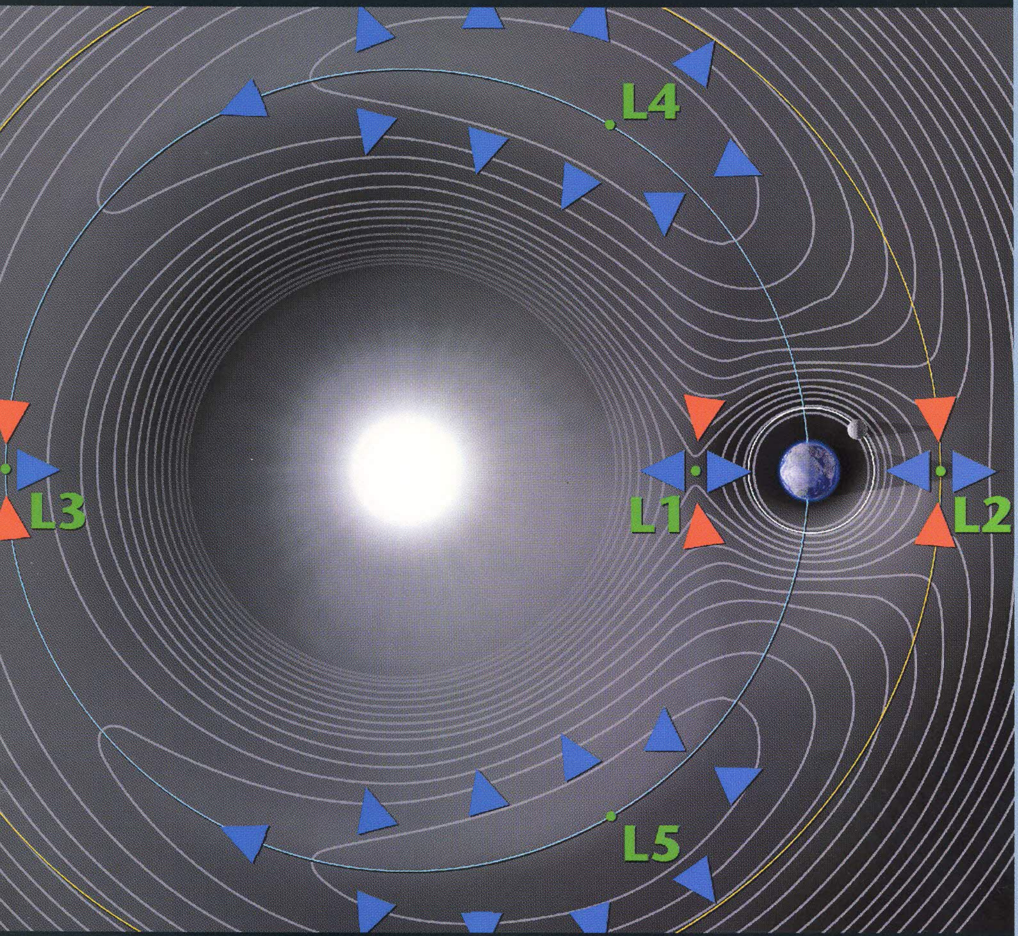
# Quadrature

**Magazine de mathématiques pures et épicées**

*La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde*




**Points de Lagrange : un ticket gratuit vers les étoiles ?**

**Formes normales et perturbations**

**Trois problèmes (ouverts) de courbes optimales**

**Une introduction au calcul stochastique**

***Et toujours :***
**Textes en questions**

**n° 111**

Magazine trimestriel
Janvier-février-mars 2019
8,50 euros
ISSN 1142-2785

Quadrature n° 111 (2019) 37-40




# Trois problèmes (ouverts) de courbes optimales

*par* Jean-Baptiste Hiriart-Urruty*

**Résumé.**

Nous présentons trois exemples de problèmes en géométrie (du plan ou de l'espace), du type *« Trouver la courbe de longueur minimale telle que... »*. Pour chacune d'entre elles, nous indiquons jusqu'à quel point le problème a pu être traité, c'est-à-dire les meilleures propositions connues. De fait, aucun de ces problèmes n'a été complètement résolu à ce jour.

## Introduction

Les problèmes dits ouverts, les conjectures... ont toujours été des moteurs dans l'avancée des connaissances en mathématiques, mais aussi dans leur aprentissage, à tous les niveaux : collèges, lycées, formations post-baccalauréat. En proposer, sous forme de défis *« Qui fera le mieux ? »* est même une activité suggérée dans les enseignements, car très formatrice. Ajouté à cela la nécessité de démonstration ou preuve d'une assertion avancée : proposer la meilleure solution connue ne signifie pas qu'il n'y en a pas de meilleure ; une solution est la meilleure dès lors qu'on a démontré qu'elle l'est... La théorie des nombres comme la géométrie sont des domaines grands pourvoyeurs de problèmes pour lesquels on peut proposer la meilleure solution connue, mais sans savoir, pour autant, si ce sont les meilleures possibles, autrement dit sans avoir pu démontrer l'optimalité de ces solutions (dans un sens à définir). L'ouvrage référencé en [1] est un exemple illustrant la démarche décrite ici : une question anodine au départ, une recherche de solutions par améliorations successives apportées au cours du temps.

Nous proposons ci-dessous trois problèmes de géométrie (avec des variantes) du type *« Trouver la courbe de longueur minimale telle que... »* ; la première est assez classique, les deux suivantes sont plus originales. Dans les trois cas, nous indiquons jusqu'où on a pu aller ; aucune d'elles n'a été complètement résolue à ce jour. Bien entendu, nous n'attendons pas du lecteur qu'il résolve ces problèmes... Mais ce que nous proposons peut servir de matériau à une démarche de recherche, entre élèves, entre amis, en famille, sur « comment apporter et/ou améliorer » une réponse à un problème donné, chacun faisant travailler son imagination.

## I Le problème du square opaque (Géométrie 2D)

Considérons dans le plan un square (ou placette) carré(e) dont les côtés sont de longueur $\ell$, mettons 10 mètres. Les habitants dans les maisons dont les façades sont les quatre côtés « ne peuvent pas se voir » et donc « ne veulent pas se voir » (autres que les voisins sur la même façade)... Il s'agit donc de construire une palissade dans le square, de longueur minimale (car tous rechignent à payer), de sorte que de chaque côté du square on soit sûr de ne voir aucun des trois autres côtés. Dans une version plus « technologique » du problème, on peut imaginer que les côtés du carré émettent des radiations nocives dirigées vers l'intérieur du carré, et on voudrait construire dans le carré

* Adresse : Institut de mathématiques, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9, France. http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/

une barrière de métal (rare et coûteux) qui arrêterait les radiations et protégerait les autres côtés. En termes mathématiques, voici ce que cela donne. Désignons par $K$ les quatre côtés du carré ; **trouver une courbe $C$ de longueur minimale, contenue dans le carré, telle que toute droite coupant $K$ coupe aussi $C$.**

Une première idée, basique, est de placer les palissades sur les quatre côtés, mais en fait les placer sur trois côtés suffit (solution ($a$) sur la figure ci-dessous) ; cela fait une longueur totale de 3 $\ell$. Une autre idée, qui vient rapidement à l'esprit est de placer des palissades sur les deux diagonales du carré (solution ($b$)) ; la longueur totale en serait $2\sqrt{2}\,\ell \approx 2,828\,\ell$. Ce n'est pas si mal... Mais posez la question autour de vous et vous verrez que des propositions plus originales surgissent. En voici deux. La première, qui ne surprendra pas les concepteurs de trajets minimaux [1], ressemble structurellement à ($b$) (voir la solution ($c$) dans la Figure 1) ; sa longueur est $(1+\sqrt{3})\,\ell \approx 2,732\,\ell$. La deuxième est comme suit : placer une palissade le long de deux côtés adjacents et sur une demi-diagonale qui part du coin opposé pour protéger mutuellement les deux côtés adjacents non couverts (solution ($d$) dans la Figure 2) ; la longueur totale est $(2+\sqrt{2}/2)\,\ell \approx 2,707\,\ell$. Oui... mais peut-on faire plus court encore ? Si oui, comment ?

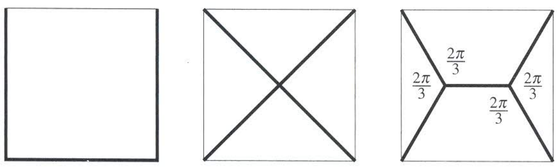



Figure 1. ($a$), ($b$), ($c$).

Une première difficulté est de préciser ce qu'on entend par « courbe »... Sans entrer dans les détails mathématiques, disons qu'il s'agit de morceaux de courbes usuelles raccordées, avec embranchements éventuels, en plusieurs morceaux s'il le faut ($C$ non connexe donc) [2]. Les quatre exemples proposés jusqu'à présent sont bien de ce type. La meilleure proposition connue à ce jour ressemble structurellement à ($d$) (solution ($e$)) : comme en ($c$), un embranchement se fait avec une répartition en trois angles égaux de $2\pi/3 = 120°$ ; comme en ($d$), une demi-diagonale, deconnectée de l'autre morceau, protège deux côtés adjacents. La longueur de cette dernière proposition est $(2+\sqrt{3})/\sqrt{2}\,\ell \approx 2,639\,\ell$. On notera une certaine « dissymétrie » dans les configurations ($d$) et ($e$) proposées.

Les questions qui restent posées sont :

1. C'est un arbre de JACOB STEINER, soit la façon la plus courte de joindre les 4 sommets du carré.

2. Dans un contexte mathématique rigoureux, ce serait via la mesure de HAUSDORFF 1-dimensionnelle.

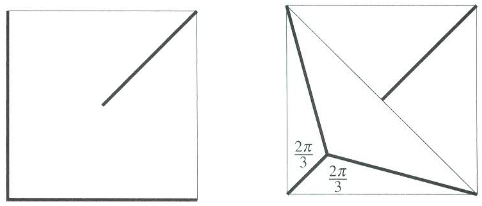



Figure 2. ($d$), ($e$).

- La solution ($e$) est-elle la plus courte parmi toutes celles possibles ? Il apparaît que oui si on impose à la courbe $C$ de n'avoir que deux morceaux d'un seul tenant (deux composantes connexes donc) ([2,5]).

- Si on autorise $n$ morceaux pour $C$, peut-on améliorer encore la meilleure longueur obtenue ? Au fond, peut-être qu'en autorisant $n$ aussi grand que l'on veut, on peut toujours améliorer la solution... et le problème posé n'aurait pas de solution (une borne inférieure oui, mais pas de minimum). Un minorant grossier de la solution éventuelle est 2 $\ell$.

Une variante du problème posé est comme suit : finalement, deux habitants dans deux sommets opposés (seulement deux sur les quatre) souhaitent aller l'un chez l'autre en passant par le square, sans avoir à escalader la palissade. Question : peut-on toujours trouver une palissade $C$ de longueur minimale respectant la contrainte énoncée plus haut et la nouvelle introduite ici ? Il est clair qu'ici $C$ ne saurait être d'un seul tenant, il lui faut au moins trois composantes connexes...

Le problème que nous venons d'exposer, celui de « la palissade opaque la plus courte » dans un carré, pourrait être posé pour n'importe quel polygone convexe, et c'est ainsi qu'il fut formulé à l'origine par le mathématicien polonais STEFAN MAZURKIEWICZ en 1916. Voici ce qui est connu, par exemple, pour le triangle équilatéral et l'hexagone régulier (longueur d'un côté toujours $\ell$). Pour le triangle équilatéral, la situation la plus simple sans doute, la configuration ($f$) de la Figure 3 a été démontrée comme étant la meilleure (la longueur de la palissade optimale est donc de $1,732\,\ell$). Pour l'hexagone régulier, ce qu'on a pu trouver de mieux est présenté en ($g$) de la Figure 3 ; la courbe $C$ y est de longueur $(7+\sqrt{3})/2\,\ell \approx 4,366\,\ell$.

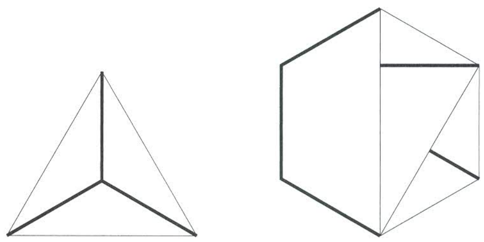


Figure 3. ($f$), ($g$).

## II Le problème de l'armature de la plus grande tente en volume (Géométrie 2D et 3D)

C'est un problème incroyablement simple à décrire et incroyablement difficile à résoudre (comme souvent les conjectures !), en fait il est toujours ouvert en 3D. Le problème est de trouver **une armature unidimensionnelle connexe $\Gamma$, de longueur totale fixée $L$, telle que son enveloppe convexe est d'aire ou volume maximal.** Expliquons : mesure signifie aire en 2D et volume en 3D ; $\Gamma$ doit être connexe (d'un seul tenant) sinon on peut « agrandir sans limite » le convexe qu'on a à mesurer ; l'enveloppe convexe de $\Gamma$ est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion des ensembles) contenant $\Gamma$[3].

Les mathématiciens se sont attaqués à ce problème, ont écrit des articles à son sujet, sans le résoudre complètement ([6,7]). Voici ce qu'on en sait en 2D et 3D.

En 2D, avec quelques difficultés, on peut démontrer que la solution au problème posé est un demi-disque $S^*$ de rayon $L/\pi$ ; l'armature optimale $\Gamma^*$ est le demi-cercle constituant le bord de $S^*$ ; l'aire maximale vaut donc $L^2/2\pi$.

En 3D, ce qu'on a trouvé de mieux est une armature $\Gamma^*$ en forme d'arc hélicoïdal (appelée encore courbe de NUDEL'MAN ([6])), d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t\,; \\ y(t) = \sin t\,; \\ z(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$$

Voir la Figure 4 ci-dessous. La courbe $\Gamma^*$ ici est de longueur $L = \sqrt{6}\pi$, et le « berlingot » $S^*$ enveloppe convexe de $\Gamma^*$ (longueur normalisée à 1) est de volume $V = 1/(18\pi\sqrt{3})$.... De fait, on conjecture que cet arc hélicoïdal est solution du problème posé, dans toute sa généralité. Des études très récentes, confortées par des test numériques, par GIUSEPPE BUTTAZZO (Pise) et EDOUARD OUDET (Grenoble), vont dans le sens de cette conjecture.

3. Comme $\Gamma$ est connexe, on obtient cette enveloppe convexe en tirant des segments joignant deux points quelconques de $\Gamma$. En effet, il n'est pas nécessaire, comme le théorème de CONSTANTIN CARATHÉODORY le suggérerait, de « badigonner » des triangles reliant trois points de $\Gamma$. Cela est dû à un très joli résultat de WERNER FENCHEL et LUCAS BUNT, peu connu à vrai dire et qui dit ceci : Quand un ensemble $S$ de $\mathbb{R}^n$ a au plus $n$ composantes connexes, alors on construit son enveloppe convexe en prenant des barycentres de $n$ points de $S$.

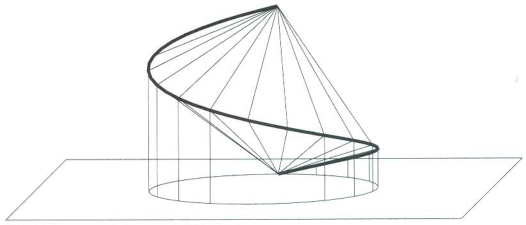


Figure 4

## III Trajectoires de surveillance de la terre de longueur minimales (Géométrie 3D)

Le problème de courbe de longueur minimale que nous présentons ici a déjà été évoquée dans notre publication [3] ; il est résolu dans le plan (en 2D donc) mais reste ouvert dans l'espace (en 3D).

Dans le plan, le problème posé est le suivant. Etant donné un cercle de rayon 1, mettons 1km, déterminer la courbe de longueur minimale, issue du centre et qui rencontrerait toute droite tangente au cercle. On peut « habiller » ce problème de différentes façons : un chasseur de champignons perdu dans une forêt, à 1km de la route où il a laissé son véhicule ; un bateau perdu dans le brouillard mais qui sait qu'il est à 1km de la côte... Quelle est la trajectoire la plus courte qu'il faudrait suivre, dans le but de rejoindre la route ou le bord ? Ce problème est résolu, dans le sens où il a été démontré que la courbe proposée (en Figure 5) est de longueur la plus petite possible.

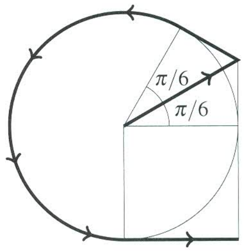



Figure 5

Prenons le même problème dans l'espace. Quelle serait **la courbe de longueur minimale, issue du centre d'une sphère de rayon $r$ fixé, qui rencontrerait tout plan tangent à la sphère** ? Ici aussi, cette recherche de courbe optimale peut être « habillée » dans des histoires, de science-fiction par exemple [2]. Il y a bien des propositions de courbes remplissant la condition imposée (toucher tout plan tangent à la sphère),... mais aucune démonstration mathématique n'est là pour assurer l'optimalité. On en est donc à proposer des courbes candidates... en voici des exemples. Libre au lecteur d'y réfléchir et d'en proposer, pourquoi pas, une plus courte (à condition de s'assurer que la condition imposée est bien satisfaite).

La courbe proposé en Figure 6 est constituée de segments de droites exclusivement. Pour la construire, on a considéré un octaèdre régulier dont la sphère de rayon $r$ est la sphère inscrite ; le chemin OABCDEF est de longueur $\approx 14{,}62\ r$, ce qui n'est pas si mal. Dans ce contexte (uniquement des segments de droite), c'est probablement la plus courte.

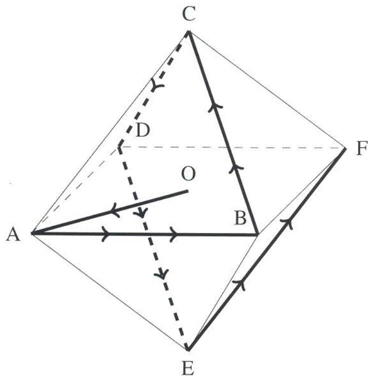



Figure 6.

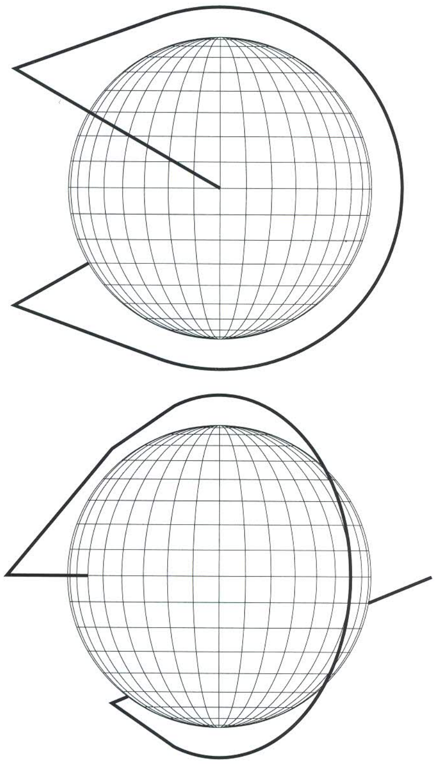


Figure 7.

Parmi les trajectoires du style de celles proposées dans la Figure 7, ce qu'on a trouvé de mieux est de longueur $\approx 13{,}66\ r$. Mais rien ne nous dit qu'on ne peut pas faire (un peu) mieux, ni qu'une solution proposée est la plus courte possible.

Une variante du problème, posée par ALAIN GRIGIS, et déjà signalée dans [3], est comme suit : **Quelle est la longueur minimale d'une courbe de l'espace qui peut être vue de tout point de la sphère ?**

## Conclusion

Les trois (petits) exemples de problèmes de courbes optimales, toujours ouverts, que nous venons de décrire, peuvent servir de matériau aux lecteurs qui participent à des ateliers de recherche par les élèves en collèges et lycées, via des associations comme Maths en Jeans ou Fermat Science.

## Références

[1] VINCENT BORELLI et JEAN-LUC RULLIÈRE, *En cheminant avec Kakeya. Voyage au coeur des mathématiques.* ENS Editions (2014).

[2] VANCE FABER and JAN MYCIELSKI, *The shortest curve that meets all the lines which meet a convex body.* Amer. Math. Monthly 93 (1986), 796-801.

[3] JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY, *Du calcul différentiel au calcul variationnel : un aperçu de l'évolution de Pierre Fermat à nos jours.* Quadrature, n° 70 (2008), 8-18.

[4] JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY, *Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose.* Tangente, n° 168 (2016), 10-11.

[5] BERND KAWOHL, *The opaque square and the opaque circle.* International Series of Numerical Mathematics, Vol. 123 (1997), 339-346.

[6] MARK G.KREIN and ADOLF A. NUDEL'MAN, *The Markov moment problem and extremal problem.* Translations of Mathematical Monographs. Amer. Math. Soc. (1977).

[7] PAOLO TILLI, *Isoperimetric inequalities for convex hulls and related questions.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 362 (2010), 4497-4509.