

Paru dans le bulletin du village de Pechbusque (Haute-Garonne), décembre 2017.

Avant de quitter 2017... et d'aborder 2018

Par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
(habitant de Pechbusque)

Plus que quelques jours et nous allons quitter 2017... Avant de le faire, il est bon de jeter un dernier coup d'œil au nombre 2017 et à ses particularités.

Qu'a de spécifique ce nombre 2017 ? Tout d'abord, c'est un *nombre premier*, c'est-à-dire qu'on ne peut le « casser » pour le mettre sous la forme d'un produit de deux nombres (autrement que le trivial 1×2017) ; en arithmétique on dit « factoriser un nombre ». Des nombres premiers il y en a beaucoup, autant qu'on en veut même ; 2017 est le 306^{ème} de la liste (qui commence par 2), il y avait déjà 2003 et 2011 depuis les années 2000, mais il y en a seulement 14 dans le 21^{ème} siècle. Pour le prochain nombre premier, il faudra attendre 2027. La « répartition » des nombres premiers parmi tous les nombres entiers fait encore l'objet de recherches intenses par les chercheurs mathématiciens.

Mais le nombre 2017 a une autre propriété : il est de la forme « 4 fois quelque chose plus 1 » ; en effet : $2017 = 2016 + 1 = 4 \text{ fois } 504, \text{ plus } 1$. Et alors là nous touchons à une particularité encore plus grande de 2017 : il est la somme de deux carrés d'entiers ! En effet, dans une intuition fulgurante comme il en avait parfois, notre génial occitan P. de Fermat avait annoncé à la volée¹ le résultat suivant : **un nombre premier** (plus grand que 3) **est la somme de deux carrés d'entiers si, et seulement si, il est de la forme $4k + 1$** . Il a fallu attendre le grand mathématicien-physicien L. Euler (un siècle plus tard) pour en avoir confirmation par une démonstration probante. Ainsi, de nos jours, cette extraordinaire caractérisation est appelée « théorème des deux carrés de Fermat-Euler » ou encore « le cadeau de Noël de Fermat ».

Revenons à nos moutons. D'après Fermat-Euler donc, 2017 est la somme de deux carrés d'entiers, et, d'ailleurs, une telle décomposition se trouve être unique. Après quelques tâtonnements, on arrive à la trouver :

$$2017 = (44)^2 + (9)^2.$$

Des nombres premiers avec cette particularité, il n'y en a pas tant que ça... Entre 2000 et 2050, il n'y en a que deux : 2017 et 2029. Voici donc une question pour vous distraire : trouver la décomposition en somme de deux carrés de 2029 (réponse à la fin). Ah ! Sacré Fermat.

¹ Dans une lettre écrite le soir de Noël 1640.

2017 pourrait être le côté le plus grand, appelé encore l'hypoténuse, d'un triangle rectangle (c'est-à-dire un triangle avec un angle droit). En effet,

$$(2017)^2 = (1855)^2 + (792)^2.$$

Ainsi, (2017, 1855, 792) est un triplet dit *pythagoricien*, appelé ainsi en raison de la référence au théorème de Pythagore dans un triangle rectangle : le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés².

Les mathématiciens savent caractériser les nombres entiers (qu'ils soient premiers ou non) qui sont sommes de deux carrés ou sommes de trois carrés ; par exemple, 7 est le premier nombre entier qui ne s'écrit pas comme somme de trois carrés. Et 2017 se trouve être aussi une somme de trois carrés :

$$2017 = (12)^2 + (28)^2 + (33)^2.$$

Si on ajoute un peu plus de flexibilité en autorisant de faire des sommes de quatre carrés, là il n'y a plus de suspense : selon le mathématicien-mécanicien-astronome L. Lagrange (1736-1813), *tout* nombre entier est somme de quatre carrés (certains étant les mêmes éventuellement). Par exemple,

$$2017 = (18)^2 + (21)^2 + (24)^2 + (26)^2,$$

et il y a cinquante possibilités pour une telle décomposition.

Avant de quitter le monde des « carrés », une petite friandise avec les sept premiers nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 :

$$(2)^2 + (3)^2 + (5)^2 + (7)^2 + (11)^2 + (13)^2 + (17)^2 = 666.$$

Le monde des sommes des cubes est un peu différent, signalons néanmoins que

$$2017 = (7)^3 + (7)^3 + (11)^3.$$

La dernière fois que le nombre marquant une année avait pu être décomposé en somme de trois cubes était en 2001 (= $(1)^3 + (10)^3 + (10)^3$), et pour la prochaine fois il faudra attendre l'année 2027 (= $(3)^3 + (10)^3 + (10)^3$).

A part cela, quoi d'autre ? 2017 est une année qui a commencé par un dimanche... et qui se terminera par un dimanche.

Le nombre 2018 de l'année qui vient est-il moins riche en particularités que celui de l'année que nous quittons ? A priori oui puisque c'est un nombre pair... *Mais* $2018 = 2 \times 1009$... et 1009 est à son tour un nombre premier de la forme $4k + 1$, c'est donc reparti pour un tour ! Quelle est donc, pour terminer, la décomposition de 1009 en somme de deux carrés d'entiers ? (réponse à la fin).

² Cette année, le 15 août 2017 (c'est-à-dire le 15/8/17) fut aussi l'occasion d'un autre triplet pythagoricien puisque $(15)^2 + (8)^2 = (17)^2$. Cela arrive très rarement...



Le local P. de Fermat (1605 ?-1665).

Réponse : $2029 = (2)^2 + (45)^2$.

Réponse : $1009 = (28)^2 + (15)^2$.