n°9

coll. Opuscules

dirigée par P. Damphousse

Format 14,5 x 19 cm

à paraître janvier 2008

Les mathématiques du mieux faire

Volume 2 La commande optimale pour les débutants

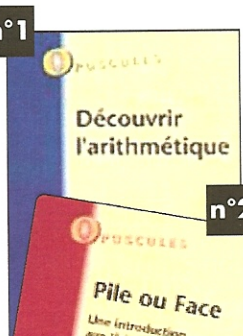
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Ce n'est que dans la deuxième moitié du XXe siècle que les ingénieurs, automaticiens et mathématiciens, motivés par les demandes issues des applications, ont été conduits à poser les fondations modernes de ce volet des « mathématiques du mieux faire » : la théorie de la commande optimale.
Cet opuscule « La commande optimale pour les débutants » est destiné à un large public, dans un souci de popularisation des bases mathématiques de la commande optimale vers des domaines utilisateurs partiels, intéressés, ou potentiels : l'automatique, le spatial, l'économie, la robotique, etc.
Notre présentation se borne à une initiation, l'accent est mis sur les idées de base ; beaucoup d'exemples d'illustration accompagnent les résultats fondamentaux.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, professeur à l' Université Paul Sabatier à Toulouse, dirige le département de mathématiques. Mathématicien reconnu, il est l'auteur de plusieurs livres publiés aux éditions Dunod, EDP Sciences, PUF, Springer Verlag. Il écrit aussi très régulièrement dans le bulletin de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

176 pages • ISBN 978-2-7298-

n°1



Découvrir l'arithmétique
Pierre Damphousse
128 pages
ISBN 2-7298-7995-1
9,5 €

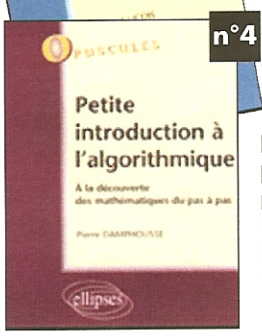
n°2

Pile ou Face - Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités
Emmanuel Lesigne
128 pages
ISBN 2-7298-0679-2
9,5 €

n°3

La géométrie élémentaire
Jean Licois
144 pages
ISBN 2-7298-2269-0
13 €

n°4



Petite introduction à l'algorithmique
Pierre Damphousse
144 pages
ISBN 2-7298-2300-X
10,5 €

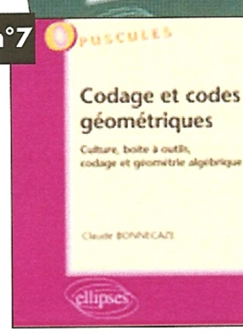
n°5

Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà - De la puissance à la complexité d'une notion simple - Volume 1
Marcel Berger, avec la collaboration de Pierre Damphousse
176 pages
ISBN 2-7298-2776-5
15 €

n°6

Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà - De la puissance à la complexité d'une notion simple - Volume 2
Marcel Berger, avec la collaboration de Pierre Damphousse
144 pages
ISBN 2-7298-2777-3
14 €

n°7



Codage et codes géométriques, Culture, boîte à outils, codage et géométrie algébrique
Claude Bonnecaze
144 pages
ISBN 978-2-7298-3214-8
14,00 €

Université Paul Sabatier (Toulouse III)
Institut de mathématiques, Bât. 1R3
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 09
France
jbhu@mail.cict.fr

Du même auteur

Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire (avec Y. Plusquellec), Cepadues-Editions, Toulouse (1988).

Convex analysis and minimization algorithms (avec C. Lemaréchal), Vol. I *Fundamentals*, Vol. II *Advanced theory and bundle methods*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305&306, Springer-Verlag (1993). Nouveau tirage en 1996.

L'optimisation, Collection «Que sais-je ?», Presses Universitaires de France (1996).

Optimisation et analyse convexe : exercices et problèmes corrigés, Presses Universitaires de France (1998).

Fundamentals of convex analysis (avec C. Lemaréchal), Grundlehren Text editions, Springer-Verlag (2001).

Calcul différentiel et équations différentielles : exercices et problèmes corrigés (avec D. Azé et G. Constans), Éditions Dunod (2002).

Les mathématiques du mieux faire. Vol. 1 : *Premiers pas en optimisation.* Collection Opuscules, Editions Ellipses, Paris (2007).

Classification AMS : 49, 93

AVANT-PROPOS

Ce qu'est ce livre et ce qu'il n'est pas.

Commander un système (ou le contrôler) de manière à lui faire faire quelque chose de manière optimale, voilà ce que pourrait être l'objectif de ce qu'on appelle la *Commande optimale* (on dit aussi *Contrôle optimal*) ; ce n'est qu'une partie d'un domaine plus vaste, intermédiaire entre les Mathématiques appliquées et l'Automatique, appelée tout simplement Commande (ou Contrôle) ; le qualificatif d'optimale rapproche la Commande optimale du Calcul des variations (on dit aussi Calcul variationnel) dont elle est la descendance moderne. Le livre que nous proposons ici a une ambition modeste : *initier* le lecteur à la théorie de la Commande optimale, avec l'arrière-pensée de lui donner *le goût du variationnel*, c'est-à-dire de cette partie des sciences (mathématiques, physiques, mécaniques, économiques, etc.) où la modélisation des problèmes conduit à minimiser (ou maximiser) un critère. Dans le style et la présentation, nous avons fait le choix d'une orientation «sciences de l'ingénieur» plutôt que «mathématiques» : l'insistance porte davantage sur les idées et exemples, peu de théorèmes (et aucun des difficiles ne) sont véritablement démontrés.

Dans mon parcours d'approfondissement de la Commande optimale, j'ai bénéficié des notes de cours écrites de collègues plus impliqués dans le sujet, comme J. BLOT (université de Paris I), R. EPENOY (CNES et ENSEEIHT de Toulouse), J.-P. RAYMOND (université PAUL SABATIER de Toulouse)...A Toulouse, le CNES et l'ENSEEIHT restent des places fortes de la recherche, développement et utilisation de la Commande optimale. Un détachement partiel (en congé sabbatique) au CNES en 2000-2001 m'a permis de mieux appréhender ce qui est effectivement utilisé en pratique et ce qui est moins utile, autant de données que j'ai traduites dans mes enseignements subséquents. En voici deux exemples. Le premier est que, comme mathématicien et dans un souci de pédagogie, je souhaitais d'abord présenter la Commande optimale dans le *contexte linéaire*... «*Mais mon cher, le monde est non linéaire*»... m'a t-on fait remarquer... Too bad... Nous envisageons donc d'entrée la commande optimale dans le contexte des sytèmes non linéaires ; seul le long problème constituant le premier paragraphe traite exclusivement du cas linéaire. Un deuxième exemple : Il me paraissait bon de présenter le Calcul des variations (avec des fonctions d'une seule variable) avant d'aborder sa généralisation que constitue la Commande optimale...«*Mais qui utilise ce type de calcul variationnel ?*» ai-je entendu... Exit donc toute référence (autre que sur un ou deux exemples d'illustration) au Calcul des variations.

Pendant quelques années nous avons enseigné la Commande optimale comme une (petite) partie d'un module de Master 1 consacré à l'Analyse variationnelle et l'Optimisation ; nous pouvons attester que la théorie et, surtout, les exemples arrivent à intéresser les étudiants, lesquels sont parfois hésitants à propos des sciences dans lesquelles ils aimeraient s'investir un peu plus. Signalons aussi le rôle de *formation de l'esprit* que joue l'étude des exemples de Commande optimale : condition nécessaire *versus* condition suffisante dans un énoncé mathématique ; analyse et synthèse d'une situation : analyser un problème proposé, examiner les candidats possibles à être solutions, éliminer des candidats, vérifier que les retenus sont bien solutions, etc. ; bref *avoir un esprit scientifique clair.*

Je remercie les étudiants, collègues, utilisateurs de mathématiques, qui ont bien voulu donner leur avis sur les premières versions de cet ouvrage (sous forme de cours polycopié). Enfin, des remerciements particuliers vont à M. MALINGE pour sa contribution à la saisie du manuscrit initial en LaTeX, ainsi qu'à Pierre DAMPHOUSSE (directeur de la collection Opuscules) pour son aide à la finalisation du projet.

Présentation succincte.

Même pour le coureur à pied médiocre que je suis, il vaut mieux s'échauffer avant une course... Nous commençons donc par un problème de «mise en jambes» (un long énoncé avec deux parties, suivi d'un corrigé détaillé) ; il est adapté d'un sujet au concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique (option PC, 2002). Il s'agit d'un problème autonome, y compris dans les notations, indépendant de toute connaissance délivrée dans l'ouvrage qu'il introduit, *mais l'y préparant.* Cela dit, traiter ce long problème n'est pas une nécessité pour la compréhension de toute la suite.

Le premier vrai paragraphe, numéroté 2, est introductif : il est consacré aux diverses formulations d'un problème de Commande optimale et à des premiers exemples. Des références sources d'exemples, ici comme au §4, sont le classique [6] et [15]. L'exemple 2.6 est tiré de [10] ; les exemples 2.7 et 2.8 sont des grands classiques du sujet ; l'exemple 2.10 est tiré du cours de R. EPENOY à l'ENSEEIHT de Toulouse. Tous ces exemples sont repris au §4 pour une résolution complète.

Le §3 constitue le coeur de l'ouvrage, car il est centré sur la condition nécessaire d'optimalité essentielle que représente le Principe du Minimum de PONTRYAGIN (PMP) ; on insiste sur sa signification et exploitation pratiques. Dans la série des exemples académiques simples proposés au §§§3.3.5, l'exemple 3.3 est tiré d'un examen posé par R. EPENOY, l'exemple 3.5 est tiré de [2]

Des exemples, encore des exemples, toujours des exemples... ils sont un des éléments essentiels de l'apprentissage des connaissances ; le paragraphe 4 leur est entièrement consacré. Comme cela a déjà été dit plus haut, [6] et [15] ont été des sources importantes pour les exemples ; par ailleurs : l'exemple 4.7 est adapté de [31] ; l'exemple 4.11 est un classique dans la planification des trajectoires au sol (en Robotique) ; l'exemple 4.12 est tiré de [11] ; l'exemple 4.15 est tiré de [12] ; l'exemple 4.16 est tiré d'un article de recherche sur la gestion optimale d'une campagne de vaccination, les exemples numériques suggérés (comme TP à la fin) ont été testés par R. EPENOY avec des élèves-ingénieurs de l'ENSEEIHT et de l'ENSICA de Toulouse. Un exemple additionnel amusant, concernant la meilleure façon de bronzer en faisant du vélo (!), se trouve dans [22].

Pour la notice historique, outre les documents papiers qui y sont cités, j'ai bénéficié des échanges avec Y. EGOROV (université PAUL SABATIER de Toulouse), B. MORDUKHOVICH (WAYNE STATE university, Detroit) et V. KALASHNIKOV (universidad de MONTERREY, Mexico).

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Toulouse, 2001-2006

Table des matières