

Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



- ◆ Mots, maths et histoire ◆
 - ◆ Les boules ! ◆
- ◆ LaTeX, logiciel libre et gratuit ◆
- ◆ Le problème de Castillon (I) ◆
 - ◆ Une urne paradoxale ◆
 - ◆ Coin des problèmes ◆
- ◆ Échecs hétérodoxes (V) ◆
 - ◆ Fin de partie ◆

Magazine trimestriel n° 54
Octobre–Décembre 2004
ISSN 1142-2785 – 8 Euros


EDP
SCIENCES

Les boules !

par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty* et Michel Pradel*

Nous étudions le comportement en fonction de la dimension n d'éléments des boules associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{R}^n , tels que le nombre de sommets, le diamètre et le volume. Le cas du volume de la boule-unité associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ de \mathbb{R}^n est exploré en détail.

I Introduction

Ce sont dans les formations de mathématiques de niveau Bac+2 ou Bac+3 que les étudiants sont mis face aux trois normes de base $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{R}^n et aux boules-unités qui leur sont associées :

$$\mathcal{B}_1(n) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{B}_2(n) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{B}_\infty(n) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq 1 \right\}. \quad (3)$$

Pour soutenir leur intuition et les guider dans les calculs, il leur est souvent conseillé – avec raison – de faire des dessins, c'est-à-dire de s'appuyer sur ce qui est observable lorsque la dimension n vaut 1, 2 ou 3. Toutefois, lorsque $n \geq 4$ et, plus spécifiquement, quand $n \rightarrow \infty$, l'aspect et le comportement d'éléments de ces boules $\mathcal{B}_i(n)$, tels que le nombre de sommets ou le volume, ne sont pas si faciles à deviner et s'avèrent, parfois, *contraires à l'intuition*. Dans cette note, nous illustrons cet état de fait par quelques exemples, notamment en considérant le comportement du volume de $\mathcal{B}_2(n)$ avec n . Ces « bizarreries » lorsque $n \rightarrow \infty$ sont aussi une préparation à la dimension infinie, contexte qui ne manque pas de dérouter les étudiants de prime abord.

Notations. \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$; la norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|_2$; les deux autres normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{R}^n sont celles (usuelles) que l'étudiant-lecteur connaît, et qui apparaissent dans les définitions (1) et (3).

Par volume (ou volume n -dimensionnel) de $\mathcal{B}_i(n)$ nous entendons la mesure de Lebesgue de $\mathcal{B}_i(n)$.

Si C est une partie convexe compacte non vide de \mathbb{R}^n , la *fonction d'appui* σ_C de C est définie comme suit :

$$d \in \mathbb{R}^n \mapsto \sigma_C(d) := \max_{x \in C} \langle x, d \rangle. \quad (4)$$

Dans la définition de $\sigma_C(d)$, prendre le maximum de $\langle x, d \rangle$ « pour $x \in C$ » revient au même que « pour x sommet (ou point extrémal) de C ».

Lorsque C et D sont deux parties convexes compactes (non vides) de \mathbb{R}^n telles que $C \subset D$ (c'est la seule situation que nous considérerons), la distance dite de Hausdorff entre C et D est

$$\Delta_H(C, D) := \max_{x \in D} d(x, C), \quad (5)$$

où $d(x, C)$ désigne la distance de x à C . Il s'avère qu'il y a une manière agréable (et facilitant les calculs) d'exprimer $\Delta_H(C, D)$ à l'aide des fonctions d'appui de C et D (voir la figure 1) :

$$\Delta_H(C, D) := \max_{\|d\|_2=1} \{\sigma_D(d) - \sigma_C(d)\}. \quad (6)$$

Pour ce type de résultats, voir le chapitre C de [2] par exemple.

II Les boules $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$

II.1 La boule-unité $\mathcal{B}_1(n)$

La boule-unité $\mathcal{B}_1(n)$ est un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^n dont voici quelques éléments caractéristiques :

- $\mathcal{B}_1(n)$ a exactement $2n$ sommets, ceux repérés par $(0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$.

* Université Paul Sabatier de Toulouse.

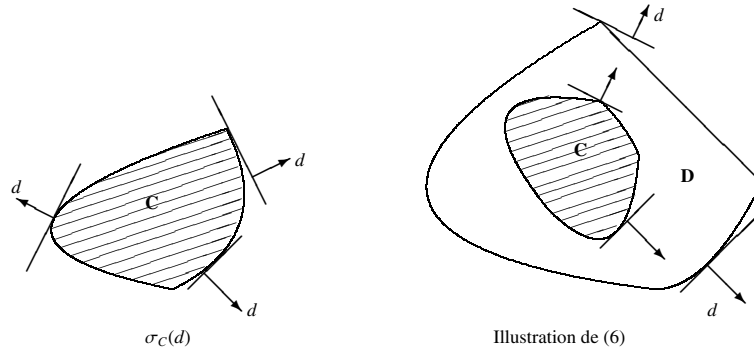


Figure 1. La fonction d'appui, la distance de Hausdorff.

- La fonction d'appui de $\mathcal{B}_1(n)$ est

$$d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sigma_{\mathcal{B}_1(n)}(d) = \max_{i=1, \dots, n} |d_i|,$$

c'est-à-dire $\|d\|_\infty$.

- Le diamètre de $\mathcal{B}_1(n)$ est constant et vaut 2 (c'est la distance entre deux sommets opposés).
- $\mathcal{B}_1(n)$ peut être partitionné en 2^n simplexes (dans chaque orthant de \mathbb{R}^n), chacun de volume $\frac{1}{n!}$; le volume total $V_1(n)$ de $\mathcal{B}_1(n)$ est donc

$$V_1(n) = \frac{2^n}{n!}. \tag{7}$$

Ainsi, $V_1(n)$ décroît avec n , tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et même

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_1(n) = e^2 - 1 = 6,389\,056. \tag{8}$$

II.2 La boule-unité $\mathcal{B}_\infty(n)$

La boule-unité $\mathcal{B}_\infty(n)$ est un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^n dont on donne également quelques éléments caractéristiques :

- $\mathcal{B}_\infty(n)$ a exactement 2^n sommets, ceux repérés par $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in \{-1, +1\}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
- La fonction d'appui de $\mathcal{B}_\infty(n)$ est

$$d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sigma_{\mathcal{B}_\infty(n)}(d) = \sum_{i=1, \dots, n} |d_i|,$$

c'est-à-dire $\|d\|_1$.

- Le diamètre de $\mathcal{B}_\infty(n)$ est $2\sqrt{n}$ (c'est la distance entre deux sommets opposés), il tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Le volume $V_\infty(n)$ de $\mathcal{B}_\infty(n)$ est

$$V_\infty(n) = 2^n, \tag{9}$$

il tend donc vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Bien que « duales l'une de l'autre », notamment *via* leurs fonctions d'appui, les boules $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$ ont des éléments dont le comportement quand $n \rightarrow +\infty$ est radicalement différent. Observons tout d'abord que la distance de Hausdorff entre $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. En effet, suivant ce qui a été rappelé en (6),

$$\Delta_H(\mathcal{B}_1(n), \mathcal{B}_\infty(n)) = \max_{\|d\|_2=1} \left\{ \sum_{i=1}^n |d_i| - \max_{i=1, \dots, n} |d_i| \right\};$$

ce maximum est atteint en $d = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, d'où

$$\Delta_H(\mathcal{B}_1(n), \mathcal{B}_\infty(n)) = \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

En ce qui concerne le nombre de sommets en fonction de n , il y a une différence notable entre $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$, différence qui ne se perçoit pas pour $n \leq 3$. Lorsque n croît, le nombre de sommets de $\mathcal{B}_1(n)$ croît de manière *linéaire* (en passant de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^{n+1} on ajoute en fait deux nouveaux sommets), tandis que le nombre de sommets de $\mathcal{B}_\infty(n)$ croît *exponentiellement* (en passant de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^{n+1} on reproduit deux copies des sommets précédents). La figure 2 illustre ce procédé :

- ▶ En tirant l'élastique AB (boule $\mathcal{B}_1(1)$) de chaque côté dans la dimension ajoutée, on crée la membrane $ABCD$ (boule $\mathcal{B}_1(2)$); en écartant cette membrane dans la dimension ajoutée, on crée le solide $ABCDEF$ (boule $\mathcal{B}_1(3)$).
- ▶ En copiant deux fois le segment AB (boule $\mathcal{B}_\infty(1)$) dans la dimension ajoutée, on crée la plaque $A'_1B'_1A'_2B'_2$ (boule $\mathcal{B}_\infty(2)$); en dupliquant deux fois cette plaque dans la dimension ajoutée, on crée le solide $A''_1B''_1A''_2B''_2A''_3B''_3A''_4B''_4$ (boule $\mathcal{B}_\infty(3)$).

En optimisation combinatoire où on peut avoir à minimiser une fonction coût sur les sommets de $\mathcal{B}_1(n)$ ou de $\mathcal{B}_\infty(n)$, on parle de « croissance polynomiale » dans le premier cas et « d'explosion combinatoire » dans le deuxième.

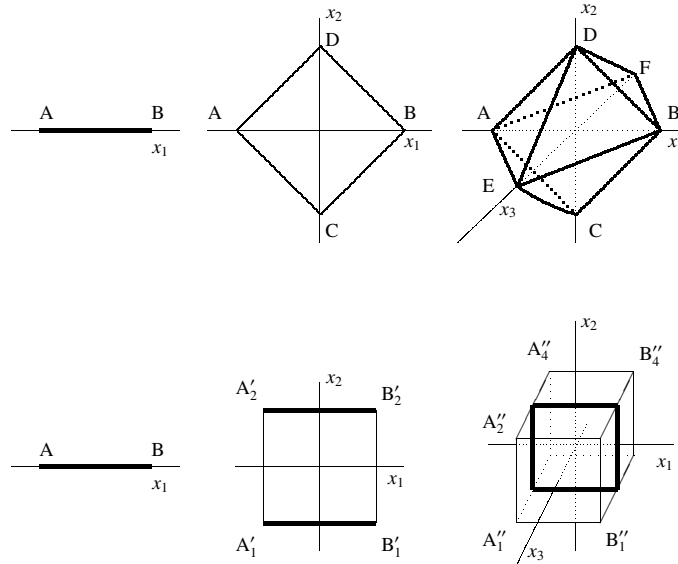


Figure 2. Évolution avec la dimension des sommets de $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$.

III La boule $\mathcal{B}_2(n)$

III.1 Premières observations

La boule-unité $\mathcal{B}_2(n)$ est intermédiaire entre $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$ puisque $\mathcal{B}_1(n) \subset \mathcal{B}_2(n) \subset \mathcal{B}_\infty(n)$. Le comportement de ses éléments caractéristiques quand $n \rightarrow +\infty$ est-il plus proche de celui des éléments de $\mathcal{B}_1(n)$ ou de celui de $\mathcal{B}_\infty(n)$?

Premières observations :

- $\mathcal{B}_2(n)$ est une partie convexe compacte parfaitement « lisse », au sens où tous les points de sa frontière (la sphère-unité donc) sont des points extrémaux (*i.e.* aucun de ces points ne se trouve à l'intérieur d'un segment de droite contenu dans $\mathcal{B}_2(n)$).

- La fonction d'appui de $\mathcal{B}_2(n)$ est

$$d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sigma_{\mathcal{B}_2(n)}(d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2},$$

c'est-à-dire $\|d\|_2$.

- Le diamètre de $\mathcal{B}_2(n)$ est constant et vaut 2 (c'est la distance entre deux points extrémaux opposés).

- Distances de Hausdorff à $\mathcal{B}_1(n)$ et $\mathcal{B}_\infty(n)$.

Selon (6),

$$\Delta_H(\mathcal{B}_1(n), \mathcal{B}_2(n)) = \max_{\|d\|_2=1} \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} - \max_{i=1, \dots, n} |d_i| \right\},$$

$$\Delta_H(\mathcal{B}_2(n), \mathcal{B}_\infty(n)) = \max_{\|d\|_2=1} \left\{ \sum_{i=1}^n |d_i| - \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2} \right\},$$

et il n'est pas difficile de montrer que le maximum dans ces expressions est également atteint en

$$d = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \text{ d'où :}$$

$$\Delta_H(\mathcal{B}_1(n), \mathcal{B}_2(n)) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad (11)$$

$$\Delta_H(\mathcal{B}_2(n), \mathcal{B}_\infty(n)) = \sqrt{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \quad (12)$$

Le volume de $\mathcal{B}_2(n)$ a, lui, un comportement curieux en fonction de n ; il mérite qu'on s'y attarde un peu.

III.2 Variation du volume de $\mathcal{B}_2(n)$ en fonction de n

Les techniques de calcul du volume de $\mathcal{B}_2(n)$ sont variées et classiques dans un cours de Calcul intégral : coupes de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et intégrations par couches successives (d'où relations de récurrence et utilisations du théorème de Fubini) ; transformations par passages aux coordonnées polaires ou sphériques (et utilisation de propriétés des déterminants), etc. Une autre méthode, mise au goût du jour plus récemment, fait appel à la transformation de Laplace [3]. Quoiqu'il en soit, le résultat est le suivant :

$$V_2(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (13)$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler

$$\left(\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ pour tout } x > 0 \right).$$

Dans une forme plus édulcorée,

$$V_2(2p) = \frac{\pi^p}{p!}, \quad V_2(2p+1) = \frac{2^{p+1} \pi^p}{(2p+1)(2p-1)\dots 5.3.1}. \quad (14)$$

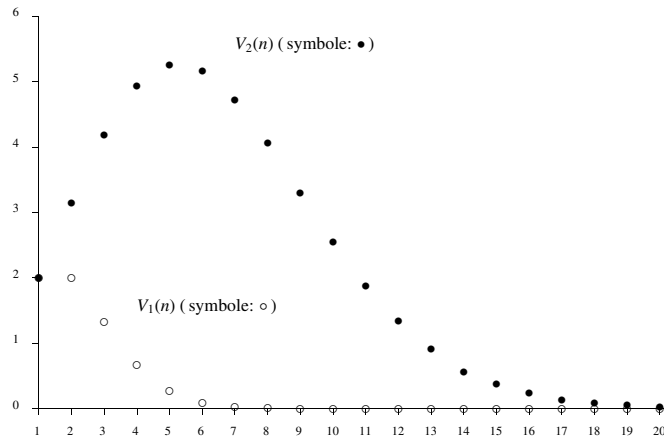


Figure 3. Évolution avec la dimension du volume de $\mathcal{B}_1(n)$ et de $\mathcal{B}_2(n)$.

Grâce à la formule de Stirling ($\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \sim \sqrt{\pi n}(\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}}$) quand $n \rightarrow \infty$ on voit que

- $V_2(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. (15)

Plus curieuse est la variation de $V_2(n)$ avec n . L'étude des quotients $V_2(2p)/V_2(2p + 1)$ et $V_2(2p - 1)/V_2(2p)$ conduit au résultat suivant :

- $V_2(n)$ croît avec n jusqu'à $n = 5$, décroît avec n pour $n \geq 5$.

Ainsi, $\max_{n \geq 1} V_2(n) = V_2(5) = \frac{8\pi^2}{15}$. Pourquoi ce rôle particulier dévolu à $n = 5$? Mystère... Si on compare $V_2(n)$ au volume $V_1(n)$ de la boule-unité $\mathcal{B}_1(n)$ (voir Sect. II.1), on note que $V_1(n)/V_2(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. La figure 3 représente les variations de $V_2(n)$ et $V_1(n)$ en fonction de n .

Il vient de (14) que la série de terme général $V_2(2p)$, $p \geq 1$, est convergente, avec $\sum_{p=1}^{\infty} V_2(2p) = e^\pi - 1$. En raison de la décroissance de $V_2(n)$ pour $n \geq 5$ on a donc que la série de terme général $V_2(n)$, $n \geq 1$, est convergente. Quelle est donc sa somme? Il ne reste plus qu'à sommer les $V_2(2p + 1)$, $p \in \mathbb{N}$. La technique pour cela est la même que pour sommer tous les $V_2(n)$, $n \geq 1$, et c'est donc cette dernière somme que nous allons calculer. Le résultat présenté ci-dessous n'est pas nouveau, il figure dans [1] et [4], entre autres.

Théorème. Soit $V_2^r(n)$ le volume d'une boule de rayon $r > 0$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_2^r(n) &= e^{\pi r^2} \left(2 \int_0^r e^{-\pi t^2} dt + 1 \right) - 1 \\ &= 2e^{\pi r^2} \int_0^r e^{-\pi u^2} du - 1 \\ &= 2e^{\pi r^2} \int_{-r}^{+\infty} e^{-\pi v^2} dv - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_2(n) &= e^\pi - 1 + 2e^\pi \int_0^1 e^{-\pi t^2} dt \\ &= 44,999\,326. \end{aligned} \tag{17}$$

Démonstration. Bien évidemment $V_2^r(n) = V_2(n)r^n$. On va donc considérer la série entière de terme général $V_2(n)r^n$, et faire apparaître sa somme $\theta(r) := \sum_{n=1}^{\infty} V_2(n)r^n$ comme solution d'un problème de Cauchy scalaire.

On a :

$$\theta'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} nr^{n-1} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} nr^{n-1} \tag{18}$$

(puisque $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$). En faisant le changement d'indices $m = n - 2$ dans (19), et sachant que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, on arrive à

$$\theta'(r) = 2 + 2\pi r(1 + \theta(r)).$$

Comme $\theta(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle ci-dessus conduit à la première expression de (17). Les deux autres variantes résultent du fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1. \quad \square$$

Références

- [1] L. Badger, « Generating the measure of n -balls », *Amer. Math. Monthly* **107** (2000) 256–258.
- [2] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis*, Grundlehren Text Editions, Springer, 2001.
- [3] J.B. Lasserre, « A quick proof for the volume of n -balls », *Amer. Math. Monthly* **108** (2001) 768-769.
- [4] D.J. Smith and M.K. Vamanamurphy, « How small is the unit ball? », *Math. Magazine* **62** (1989) 101–107.

QUADRATURE

Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques.**

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✓ articles de revue,
- ✓ brèves scientifiques,
- ✓ forum des lecteurs,
- ✓ manifestations,
- ✓ reportages,
- ✓ images mathématiques,
- ✓ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✓ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✓ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature

EDP Sciences

PA de Courtabœuf

17 avenue du Hoggar

BP 112

91944 Les Ulis Cedex A

Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17

E-mail : quadrature@edpsciences.org



Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques.**

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.



BULLETIN D'ABONNEMENT Quadrature

Mme Mlle M.

Nom

Prénom

Profession

Institution

.....

Adresse

.....

.....

Code Postal

Ville

Pays

e-mail

Veillez enregistrer mon abonnement :

- Pour **1 an** (4 numéros) :
- Europe (TVA 2,1% incluse) 32 €
 - Reste du monde (Hors Taxe) 37 €
- Pour **2 ans** (8 numéros) :
- Europe (TVA 2,1% incluse) 58 €
 - Reste du monde (Hors Taxe) 68 €

Paiement :

- Envoyez-moi une facture proforma
- Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)
- Carte de Crédit :
- Visa Eurocard American Express
- Carte No
Date de validité

date/signature



Veillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement

17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org