Revue des Mathématiques de l'enseignement supérieur (RMS)
Numéro 2 . 2002/2003.

LA TRANSFORMATION DE FOURIER DE FONCTIONS : AU-DELÀ DE L^1 ET L^2

J.-B. Hiriart-Urruty et M. Pradel*

C'est dans un cours de Calcul intégral de niveau Bac+3 (premières années d'écoles d'ingénieurs, Licences des universités) qu'est généralement introduite et étudiée la transformation de Fourier de fonctions. Elle est d'abord traitée pour des fonctions f intégrables ($f \in L^1$) puis pour des fonctions de carré intégrable ($f \in L^2$), et on insiste sur le fait que l'approche ne saurait être la même pour les deux espaces de fonctions. L'objet de cette note est de montrer que ce faisant, on a en fait défini la transformation de Fourier pour des fonctions f de L^p, où $1 \leqslant p \leqslant 2$. On profite de l'occasion pour indiquer qu'il y a plusieurs manières de définir la transformation de Fourier sur L^2, la méthode très « hilbertienne » de N. Wiener notamment.

Rien de ce qui va être présenté n'est vraiment nouveau, mais il nous semble que cela mériterait d'être mieux connu et d'apparaître, au moins sous forme de commentaire, dans les cours de Calcul intégral.

Seules les fonctions de la variable réelle sont considérées ; $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue, et $L^p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des (classes de) fonctions à valeurs réelles ou complexes, de puissance p-ième intégrable.

Partie I
La transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Une fois que l'espace $L^1(\mathbb{R})$ a été défini et étudié, l'introduction de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\xi \in \mathbb{R} \longmapsto \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi} f(x)\, dx, \tag{1}$$

* Agrégés des mathématiques, professeurs à l'université Paul Sabatier, Toulouse.

ne pose pas de grandes difficultés à l'étudiant. Ce chapitre du cours est l'occasion de donner les premières propriétés de cette transformation appliquée aux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, de fournir quelques exemples de transformées de fonctions et des méthodes de calcul pour y arriver, et enfin de voir ce que donne la transformée de Fourier d'une fonction, lorsque la transformée en question est intégrable (introduction à la transformée de Fourier inverse).

Partie II
La transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Dans tout cours de Calcul intégral, on insiste, contre-exemples à l'appui, sur le fait que $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ ne se comparent pas (l'un des deux n'est pas inclus dans l'autre). Or, voilà que le chapitre suivant concernant la transformation de Fourier se propose de définir celle-ci sur $L^2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, après avoir souligné qu'une formule comme (1) ne saurait être utilisée dès lors que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, il est habituel (dans les cours en France du moins) d'utiliser un résultat de prolongement d'application linéaire continue. Étant donné un sous-espace vectoriel V de fonctions intégrables, dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'application linéaire continue particulière qu'est la transformation de Fourier

$$f \in V\Big(\subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\Big) \longmapsto \widehat{f}$$

a les propriétés requises pour être prolongée sans ambiguïté à $L^2(\mathbb{R})$. On peut prendre pour V par exemple :

– l'espace de L. Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions dites « à écrasement rapide à l'infini » ;

– l'espace de N. Wiener $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ des fonctions f telles que f et $\widehat{f}$ soient dans $L^1(\mathbb{R})$;

– l'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, contenant les deux précédents.

L'approche a son intérêt, ne serait-ce que parce qu'elle est l'occasion d'utiliser ce théorème de prolongement d'application linéaire continue, vu par ailleurs dans un cours de même niveau (de Topologie, d'Analyse réelle).

Or il existe d'autres méthodes pour définir la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$; celle que nous évoquons ci-dessous est due à N. Wiener (1933) et elle a la particularité d'être très « hilbertienne » comme nous allons le voir, donc susceptible d'être mieux « avalée » par un étudiant, lequel subit par ailleurs à ce même niveau, une formation en Analyse hilbertienne.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto h_n(x) := e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2}. \tag{2}$$

Attention ici au fait que les exposants dans les deux exponentielles ne sont pas les mêmes. De manière claire,

$$h_n(x) = e^{-\pi x^2}\left(e^{2\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-2\pi x^2}\right),$$

h_n est donc le produit de $e^{-\pi x^2}$ par un objet bien connu, à savoir le polynôme H_n de Hermite (à un changement d'échelle près). Les h_n sont appelées *les fonctions de Hermite* ; les premiers éléments en sont :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \quad h_0(x) = e^{-\pi x^2} ;$$

$$h_1(x) = -4\,\pi\, x e^{-\pi x^2} ;$$

$$h_2(x) = 4\,\pi\,(4\,\pi\, x^2 - 1)e^{-\pi x^2}.$$

Les fonctions h_n sont à écrasement rapide à l'infini, et leurs propriétés dans le contexte de la transformation de Fourier sont aisées à obtenir (cf. [1, Section 2.5] ou [2, Exercice 10.10] par exemple) ; en particulier, celle-ci est essentielle :

$$\widehat{h_n} = (-i)^n h_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

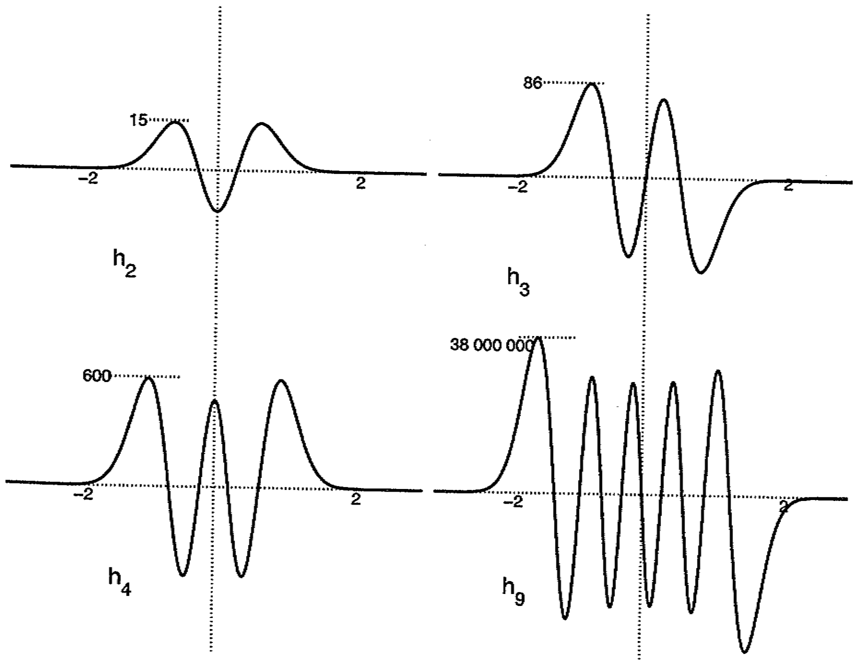

Figure 1 : Quelques fonctions de Hermite.

Ainsi, les h_n sont des (fonctions) vecteurs propres pour les quatre valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier, à savoir $1, -i, -1, i$.

Par ailleurs, quitte à normaliser les h_n en posant $e_n := \dfrac{h_n}{\|h_n\|_2}$, nous avons la propriété « hilbertienne » fondamentale que voici (cf. [3, Section 6] ou [1, p. 99-101] par exemple) :

$$\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2(\mathbb{R}). \tag{4}$$

La méthode de N. Wiener ([3]) consiste alors à définir la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$ comme suit :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \longmapsto \mathcal{F}f := \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle (-i)^n e_n, \tag{5}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne, bien entendu, le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{R})$. Du coup, le théorème de Plancherel (1910) « se lit » dans (5) via la relation de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle (-i)^n|^2 = \|\mathcal{F}f\|_2^2.$$

La vision géométrique de cette affaire est que $L^2(\mathbb{R})$ est la somme directe de quatre sous-espaces, $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, les quatre sous-espaces propres pour la transformation de Fourier :

$$\mathcal{H}_k := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ f = \sum_{n=0}^{+\infty} < f, e_{k+4n} > e_{k+4n} \right\}.$$

En résumé : *la transformation de Fourier sur L^2 est une sorte de rotation, son action sur $\mathcal{H}_k$ consiste en une multiplication par $(-i)^k$, soit l'équivalent d'une rotation par un angle de* 0, $\frac{3\pi}{2}$, π *et* $\frac{\pi}{2}$ *respectivement.*

Ayant défini $\widehat{f}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, une étape naturelle consiste à démontrer la cohérence des définitions, à savoir :

$$\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}), \text{ dès lors que } f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Ceci est toujours fait, car incontournable.

Et après ? À l'issue de ces deux chapitres (transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, puis dans $L^2(\mathbb{R})$), et se rappelant que $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ ne se comparent pas, l'étudiant a l'impression qu'il a affaire à une définition sur deux espaces différents, $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, ne coïncidant que sur leur intersection. Or, il n'en est rien : la transformée de Fourier a été définie, en fait, sur tous les $L^p(\mathbb{R})$, avec $1 \leqslant p \leqslant 2$. C'est ce que nous allons voir à présent.

Partie III
La transformation de Fourier dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$

Théorème 1.

– *La transformation de Fourier est définie sans ambiguïté sur $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$;*
– *Tous les $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, sont contenus dans $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration.

– Soit $\varphi = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, avec f_1 et g_1 dans $L^1(\mathbb{R})$, f_2 et g_2 dans $L^2(\mathbb{R})$. Comme $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la transformation de Fourier sur ces deux fonctions est bien définie et (cf. (6)) :

$$\widehat{f_1} - \widehat{g_1} = \widehat{(f_1 - g_1)} = \mathcal{F}(g_2 - f_2) = \mathcal{F}(g_2) - \mathcal{F}(f_2).$$

Ainsi $\mathcal{F}(\varphi) := \widehat{f_1} + \mathcal{F}(f_2) = \widehat{g_1} + \mathcal{F}(g_2)$, de sorte que la définition de $\mathcal{F}(\varphi)$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$, ne souffre d'aucune ambiguïté.

– Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Imaginons f comme étant un représentant de la classe dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour pouvoir mieux parler de conditions ponctuelles. Posons :

$$E := \left\{x \in \mathbb{R} : \ |f| > 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |f|^p > 1\right\}.$$

Décomposons f sous la forme $f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$ (ici, χ_A est la fonction indicatrice de A, $\chi_A(x) = 0$ si $x \in A$, 1 sinon, et E^c est le complémentaire de E dans $\mathbb{R}$). Nous allons démontrer que $f\chi_E \in L^1(\mathbb{R})$ et $f\chi_{E^c} \in L^2(\mathbb{R})$.

On a tout d'abord

$$mes(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^p dx < +\infty,$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} |f\chi_E| \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}} (\chi_E)^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$
$$\leqslant \|f\|_p . \left[mes(E)\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

d'où $f\chi_E \in L^1(\mathbb{R})$.

Ensuite,

$$\int_{\mathbb{R}} |f\chi_{E^c}|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f\chi_{E^c}|^p \quad (\text{car } (f\chi_{E^c})(x) \leqslant 1 \text{ et } p \leqslant 2)$$
$$\leqslant \|f\|_p{}^p < +\infty,$$

d'où $f\chi_{E^c} \in L^2(\mathbb{R})$.

L'approche prosaïque proposée ci-dessus a ses limites. On a certes

$$\mathcal{F}\big(L^p(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{F}\big(L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})\big)$$

qui n'est autre que

$$L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}),$$

mais cela n'indique pas précisément si $\mathcal{F}_f, f \in L^p(\mathbb{R})$, est dans un autre espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R})$. Pour cela, il faut travailler davantage et faire appel à des techniques (du type interpolation à la Riesz-Thorin) plus avancées que celles disponibles au niveau où nous nous sommes placés. De fait, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p \leqslant 2$, la transformée $\mathcal{F}f$ est dans $L^q(\mathbb{R})$, où q est le conjugué de p ($q \in [2, +\infty[$ donc), avec l'inégalité (de continuité) suivante :

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leqslant \|f\|_p. \tag{7}$$

Mais on peut faire mieux que cela : d'après W. Beckner ([4]),

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leqslant \frac{p^{\frac{1}{2p}}}{q^{\frac{1}{2q}}} \|f\|_p \text{ pour } f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 < p \leqslant 2. \tag{8}$$

Cette constante $p^{\frac{1}{2p}}/q^{\frac{1}{2q}}$ est optimale puisque $\|f\|_p = p^{-\frac{1}{2p}}$ et $\|\mathcal{F}f\|_q = q^{-\frac{1}{2q}}$ lorsque $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = e^{-\pi x^2}$.

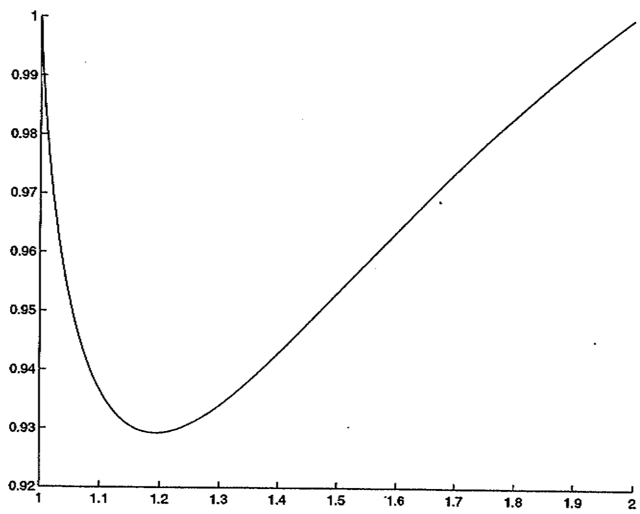

Figure 2 : Valeur de la constante optimale $p^{\frac{1}{2p}}/q^{\frac{1}{2q}}$,$1 < p \leqslant 2$.

[1.] H. DYM ET H.P. MCKEAN : *Fourier series and integrals,* Academic Press, London (1972).

[2.] EL HAJ LAAMRI : *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions,* Dunod, Paris (2001).

[3.] N. WIENER : *The Fourier integral and certain of its applications,* Cambridge University Press, London (1933). Reprinted by Dover, New York (1959).

[4.] W. BECKNER : *Inequalities in Fourier analysis,* Ann. of Math. 102 (1975), 159-182.

JBHU : jbhu@cict.fr MP : pradel@cict.fr