Conjecturer en mathématiques...
comme Fermat ?[1]

Par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty[2]

Conjecture... Si on ouvre un dictionnaire quelconque à ce mot, voici ce qu'on peut trouver : hypothèse formulée sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ne connaît pas encore la démonstration. En d'autres termes, c'est une "question ouverte", pour laquelle une affirmation a été prononcée : *"Oui, je pense que cette assertion est vraie"*, ou bien, ce qui a la même portée logique, *"Non, je conjecture que cet énoncé est faux"*. En mathématiques, comme dans d'autres sciences, les conjectures ont toujours joué un rôle de stimulant et de moteur. Chaque domaine des mathématiques a ses conjectures, plus ou moins connues, plus ou moins compréhensibles des non spécialistes... Il y a des listes "officielles" pour mathématiciens professionnels (comme les 7 des Prix Clay, 2000), ou d'autres plus compréhensibles pour amateurs éclairés (comme le Top 5 des conjectures selon M. Launay sur YouTube, 2016). "Conjecturer" est même une démarche qui est encouragée dans l'apprentissage des mathématiques, y compris dans les classes de collèges et lycées (*cf.* programmes officiels ou sujets d'examens).

Conjecture... Comment, en prononçant ce mot, ne pas penser à celle qui a fait la célébrité de Fermat ? Le génial occitan avait dans sa besace d'autres énoncés que ladite "grande conjecture"... Lancer des conjectures, des défis,... était d'ailleurs pour lui une manière de faire avancer les mathématiques, dont il a beaucoup usé.

Conjecture... qu'en est-il aujourd'hui ? Les conjectures jouent toujours un rôle dans la formation et la recherche mathématique contemporaines... L'outil informatique, permettant des calculs puissants, aide aussi à étayer ou réfuter une conjecture que le simple cerveau humain peut concocter. Mais on peut se faire piéger... Dans cette courte communication, nous montrerons sur des exemples simples comment les résultats de calculs poussés (dont ne disposait pas Fermat), des considérations physiques ou numériques, peuvent conduire à avancer la véracité d'un énoncé... alors qu'il est mathématiquement faux. Bref, une formule peut être "numériquement" ou "physiquement" admise comme exacte, et "mathématiquement" inexacte...

1. Communication à la journée **"Nouveaux regards sur Pierre (de) Fermat"**, Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse (18 juin 2018).

2. Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier de Toulouse. http ://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/

Plan de la communication :

1. Célébrité et destinée d'une conjecture.

2. Du côté des collégiens et lycéens. . .

3. Du côté du grand public. . . et des mathématiciens professionnels

4. Des exemples de conjectures, ou comment arriver à leurs énoncés, comment les résoudre éventuellement, et comment se faire piéger. . .

5. Conclusion. Les démonstrations de conjecture, lorsque ça se produit.

1. Célébrité et destinée d'une conjecture.

Avant d'aller plus loin. *Conjecture* est parfois confondu avec *conjoncture*. . . nous l'avons observé sous la plume de journalistes scientifiques et même dans des discours de secrétaires d'état ou ministres des universités. . . Nous-mêmes avons sans doute parfois failli sur ce point, mais c'est bien de conjecture qu'il s'agit ici.

Qu'est-ce qu'une conjecture célèbre ? C'est, me semble t-il, une affirmation qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- L'énoncé en est **simple**, **compréhensible** par le plus grand nombre de mathématiciens, voire de non mathématiciens. La grande conjecture de Pierre Fermat, jusqu'à sa démonstration par Andrew Wiles et Richard Taylor en 1994, en était un exemple parfait.

- Avoir **résisté** (assez) **longtemps** aux assauts des mathématiciens professionnels.

- Avoir **engendré de nouvelles mathématiques** à travers les différentes tentatives de résolution.

C'est sans doute ce dernier critère qui est le plus important dans le contexte de l'avancement des sciences.

A cet égard, l'image (de jeux de fêtes foraines ou de casinos) qui me vient à l'esprit est celle de certaines machines à sous, où l'objectif est de faire tomber des pièces de monnaie à partir de présentoirs où elles sont disposées (sous verre), à l'aide de quelques mouvements autorisés (et commandés de l'extérieur de l'appareil). Lorsqu'on voit ça, la première réaction est de se dire : *"Je vois comment faire, je vais y arriver..."*. En conséquence, on joue, on insiste, on s'énerve... et on abandonne. La personne qui vous suit a la même réaction que la vôtre initiale : *"Il s'y est mal pris, moi je vois comment faire..."* ; à son tour, il joue en essayant autre chose, insiste, et finit par abandonner...

La destinée d'une conjecture se résume à deux possibilités :

- ou bien elle est démontrée (au sens mathématique du terme), c'est-à-dire qu'on en donne une *démonstration* ou *preuve* (validée par les mathématiciens) ;

- ou bien elle est réfutée, c'est-à-dire qu'on exhibe un *contre-exemple* (on dit aussi *exemple contraire*).

A défaut, le problème posé reste ouvert, c'est la formule consacrée, et la conjecture énoncée continue de vivre.

Les références [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] permettent de prolonger notre réflexion sur les conjectures.

2. Du côté des collégiens et lycéens...

Les collégiens et lycéens doivent connaître le sens du mot conjecture et l'objectif de sa pratique (le substantif *conjecture* et le verbe *conjecturer*). Ils apparaissent dans les programmes officiels comme dans des sujets d'examen. En voici des exemples.

Dès le collège :

Extrait des objectifs du cycle 4 (classes de 5^e, 4^e, 3^e) du programme de mathématiques sur le site d'informations du portail Eduscol du Ministère de l'Education Nationale :

*La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, prend appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique, mais également mise au point d'un programme qui doit tourner sur un ordinateur ou pratique de jeux pour lesquels il faut développer une stratégie gagnante, individuelle ou collective, ou maximiser ses chances). Les pratiques d'investigation (essai-erreur, **conjecture**-validation, etc.) sont essentielles et peuvent s'appuyer aussi bien sur des manipulations ou des recherches papier/crayon, que sur l'usage d'outils numériques (tableurs, logiciels de géométrie, etc.).*

Ou encore dans le détail des programmes de mathématiques du cycle 4 :

*S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, **émettre une conjecture**.*

Voici maintenant un extrait de sujet d'examen, Bac S de 2017. Il s'agissait d'un exercice classique d'étude de fonctions, dans lequel la longueur d'un segment était calculée pour différentes valeurs d'un paramètre a, et observée comme constante. On en conjecturait donc que cette longueur était constamment égale à 2. L'objet de la deuxième partie de la question était précisément de démontrer que cette longueur était effectivement toujours égale à 2, quelle que soit la valeur du paramètre a.

Exercice 3 (3 *points*)

Commun à tous les candidats

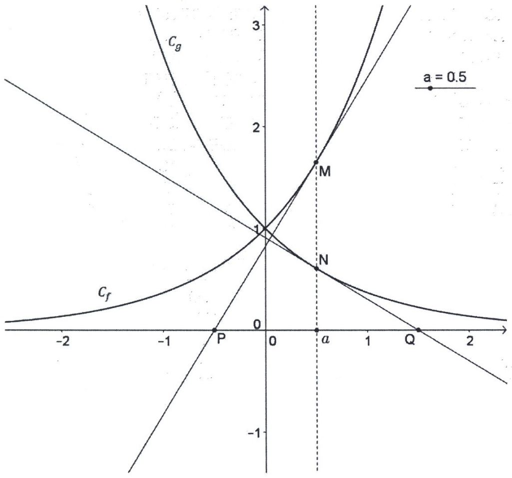
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble **R** des nombres réels par

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a.
La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2.

a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
b. Démontrer cette conjecture.

Bref, dès le jeune âge, il faut savoir ce que signifient les vocables conjecture et conjecturer.

3. Du côté du grand public… et des mathématiciens professionnels

Sur YouTube -car personne ne regarde plus les livres (oui, je sais, j'exagère)-, le jeune mathématicien et vulgarisateur Mickaël Launay a créé un site présentant le Top 5 (selon lui) des problèmes de mathématiques simples mais non résolus. Postée en juillet 2016, cette vidéo a été vue plus de 400000 fois.

Puisque destiné au grand public, le document se devait de ne s'appuyer que sur des notions mathématiques simples et faciles à comprendre ; de fait, les problèmes posés concernent exclusivement les nombres et la géométrie du plan. Pour les intéressés, je signale le libellé des cinq problèmes :

5. La conjecture de SYRACUSE, *4. Les nombres de* RAMSEY *; 3. Les nombres de* LYCHREL *ou une conjecture sur les nombres palindromes ; 2. Le nombre chromatique du plan ; 1. La persistance multiplicative des nombres.*

La simplicité des énoncés ne doit pas occulter qu'il s'agit de questions auxquelles il est difficile de répondre... sinon elles n'apparaîtraient pas dans le champ des conjectures.

A l'autre bout du spectre, chez les mathématiciens professionnels, on peut trouver une liste célèbre de problèmes non résolus, que nous mentionnons ici car sa diffusion a reçu une couverture médiatique sans précédent. En 2000, l'Institut CLAY (fondé par un homme d'affaires et son épouse, les époux CLAY) présente sept défis mathématiques... avec un million de dollars de récompense pour la résolution de chacun de ces problèmes. Ne nous y trompons pas, il s'agit de questions destinées aux mathématiciens professionnels,... leurs énoncés mêmes peuvent être incompréhensibles à ceux qui ne sont pas dans le sujet. Reconnaissons que ce fut un coup de publicité magistral ! En effet, les CLAY savaient bien que ces problèmes, qui avaient résisté des années et des années à des super-mathématiciens, ne seraient pas résolus en quelques années... Et, de fait, seul un des sept problèmes (ladite conjecture de POINCARÉ, énoncée en 1904) a été résolue depuis 2000 (par un mathématicien russe, qui a d'ailleurs refusé le prix d'un million de dollars qui allait avec...).

Entre les deux extrémités du spectre, les mathématiciens de tout niveau, chacun dans son domaine d'expertise, est confronté à des conjectures, qu'il essaie de résoudre (parfois) ou qu'il contourne (souvent).

4. Des exemples de conjectures, ou comment arriver à leurs énoncés, comment les résoudre éventuellement, et comment se faire piéger...

4.1 Une conjecture et sa solution pour les élèves de lycée

Comme nous l'avons indiqué au début de cette communication, l'activité de *conjecturer en mathématiques* est préconisée dès les classes de l'enseignement secondaire. Nous en donnons ici un exemple simple, tiré de [6].

On fait observer à l'élève ce que vaut la somme N_n des n premiers entiers impairs $1, 3, 5, .., (2n-1)$, suivie de ce que vaut la somme D_n des n nombres impairs suivants $2n+1, 2n+3, ..., (4n-1)$, et ce pour plusieurs valeurs de l'entier $n \geqslant 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N_2 &= 1+3=\mathbf{4},\ D_2=5+7=\mathbf{12}\ ; \\ N_3 &= 1+3+5=\mathbf{9},\ D_3=7+9+11=\mathbf{27}\ ; \\ N_4 &= 1+3+5+7=\mathbf{16},\ D_4=9+11+13+15=\mathbf{48}. \end{aligned}$$

Il est donc tentant d'émettre la conjecture suivante -et c'est ce que l'élève est incité à faire- :

$$\frac{N_n}{D_n} := \frac{1+3+5+...+\ (2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+...+(4n-1)} = \frac{1}{3} \text{ pour tout } n \geqslant 2,$$

c'est-à-dire que la somme des n premiers nombres impairs vaut toujours le tiers de la somme des n nombres impairs suivants. A ce niveau d'études, il est plus habituel de demander ensuite une démonstration du résultat conjecturé, plutôt que de trouver un contre-exemple ; c'était d'ailleurs le cas pour le sujet de Baccalauréat évoqué à la fin du paragraphe 2. L'élève a ici au moins deux possibilités de démonstration : par la méthode dite de récurrence (familière dès la classe de Première), ou bien en utilisant la forme condensée explicite (en fonction de n) de N_n, somme des n premiers nombres impairs. En effet - et ce n'est pas bien difficile à démontrer -

$$1+3+5+...+\ (2n-1) = n^2 \text{ pour tout entier } n.$$

En conséquence, $\frac{N_n}{D_n} = \frac{n^2}{(2n)^2-n^2} = \frac{1}{3}$ pour tout entier n. Nous avons donc bien démontré la conjecture émise, qui devient ainsi un théorème.

4.2 Les intégrales de Borwein

Il y a quelques années, les mathématiciens David et Jon Borwein (ce sont le père et un fils) ont été amenés à considérer les intégrales (généralisées) ci-dessous, dépendant de l'entier naturel n (c'est-à-dire $n = 0, 1, 2$, etc.). Peu importe leur motivation (Physique, Probabilités, Géométrie), elle n'a pas d'incidence sur ce que nous allons discuter. Voici ces intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}...\ \frac{\sin(x/(2n+1))}{x/(2n+1)}\ dx. \tag{1}$$

Sous le signe d'intégration, il y a un produit de $n+1$ fonctions du type $\frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)}$, k allant de 0 à n. La question posée est : que valent ces intégrales ?

Commençons avec $n = 0$. Il n'y a qu'un seul terme dans le produit sous le signe d'intégration, et on est conduit à calculer l'intégrale de la fameuse fonction *sinus cardinal* (fonction continue de x valant $\sin(x)/x$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$), soit

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Tout étudiant en Mathématiques ou en Physique a rencontré cette intégrale et a eu à la calculer ; elle apparaît notamment en Théorie du signal comme une transformée de FOURIER.

Passons maintenant à $n = 1$; le calcul donne

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Continuons avec $n = 2$; on a

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Puis avec $n = 3, n = 4$, etc. On trouve toujours la valeur $\pi/2$! Bizarre... D'où la tentation (normale) de **conjecturer que $I_n = \pi/2$ pour toute valeur de l'entier n.**

Avant d'aller plus loin, le mathématicien, un peu numéricien, décide de faire les calculs sur ordinateurs pour les valeurs $n = 5, 6, 7, ..$ Le résultat est que la conjecture à l'air de se vérifier puisqu'il trouve $I_5 = 1,57079632679$, $I_6 = 1,57079632679$, ce qui est la valeur attendue (de $\pi/2$), au moins pour les 11 premières décimales affichées... Il passe au calcul pour $n = 7$, et là, quoi ? l'approximation numérique trouvée est

$$I_7 = 1,57079632677 (= 0,9999999992 \times \frac{\pi}{2}),$$

... seule la onzième décimale diffère des valeurs calculées précédentes. Mais, pourquoi chipoter... ce doit être une erreur d'arrondi dans son calcul numérique complexe... D'ailleurs, son collègue, davantage expert en calcul formel ou symbolique[3], pense qu'il doit y avoir un léger "bug" dans le programme de calcul, ce qui expliquerait cette très légère différence. On peut donc déclarer, en choeur avec les numériciens et les expérimentateurs, que I_7 est "numériquement" ou "physiquement" égale à $\pi/2$.

Et pourtant, patratas !... Le mathématicien, lui, s'acharne sur le calcul *exact* de I_7 et trouve sa valeur *exacte*

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} ... \frac{\sin(x/15)}{x/15}\, dx \\ &= \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000} \pi \end{aligned}$$

3. Le *calcul formel* ou *calcul symbolique* est en général considéré comme un domaine distinct du calcul scientifique, cette dernière appellation faisant référence au *calcul numérique approché* à l'aide de nombres en virgule flottante, là où le calcul formel met l'accent sur les calculs exacts sur des expressions pouvant contenir des variables ou des nombres en précision arbitraire.

ce qui est très proche de $\frac{1}{2}\pi$, mais ne lui est pas égal ! Si on veut être précis,

$$I_7 \backsimeq \frac{\pi}{2} - 2,31 \times 10^{-11}.$$

La conjecture énoncée est donc fausse, on en a donné un contre-exemple. D'ailleurs, pour de plus grandes valeurs de n, l'intégrale I_n se met à s'écarter de la valeur $\pi/2$... Ce comportement un peu étrange a une explication mathématique ou physique ([2, 10]), mais ce n'est pas ici le lieu de l'expliquer.

Pour ces intégrales de BORWEIN, il s'est passé un peu ce qui s'est passé pour la célèbre équation de FERMAT : des résultats corrects et vérifiés pour les premières instances de l'entier n, après on n'en savait trop rien... Comme quoi, il ne faut pas généraliser trop vite... En mathématiques, rien ne remplace une démonstration.

4.3 Pourtant ce n'est pas un carré parfait... (tiré de [12])

On peut aller très loin dans la vérification d'une formule... et se faire piéger quand même. Voici un exemple de tel cas. Considérons les entiers de la forme $991 \times n^2 + 1$ construits à partir des entiers naturels $n = 1, 2, 3, ...$ Les calculs sur ordinateur semblent indiquer que cet entier $991 \times n^2 + 1$ n'est pas un carré d'entier (ou un *carré parfait*), c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'entier m tel que $m^2 = 991 \times n^2 + 1$. Jusqu'à un million, ça marche, on ne trouve aucun entier $991 \times n^2 + 1$ qui soit un carré parfait. Jusqu'à un milliard, ça marche aussi. Jusqu'à un milliard de milliards, ça marche toujours ! On est donc tenté de **conjecturer que l'entier** $991 \times n^2 + 1$ **n'est jamais un carré parfait.** Eh bien, zut ! non, car [4]

$$\begin{aligned} & 991 \times (12055735790331359447442538767)^2 + 1 \\ = \; & (379516400906811930638014896080)^2. \end{aligned}$$

Moralité : il faut aller parfois très loin dans les calculs, au-delà des entiers accessibles de l'univers "physique" qui nous entoure, pour "casser" une conjecture... Mais pour le mathématicien, ça ne change rien, que le contre-exemple soit obtenu avec un "petit" entier ou un "grand"...

4.4 Une conjecture à la FERMAT

Comme on le sait, FERMAT s'est intéressé à l'équation en nombres entiers

$$x^4 + y^4 = z^4.$$

Il aurait pu être intéressé - et peut-être l'a-t-il été - par l'équation, toujours en nombres entiers,

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4. \tag{6}$$

4. Une erreur s'est glissée dans la référence [12], elle m'a été signalée par P. GERMAIN-LACOUR : c'est $991 \times (120\underline{5}57...)$ et non $991 \times (120\underline{0}57...)$.

On a longtemps conjecturé que cette équation diophantienne [5], n'avait pas de solutions qui seraient des nombres entiers... même L. EULER le pensait (en 1772), c'est peu dire... Il a fallu attendre plus de deux cents ans pour réfuter cette conjecture, c'est-à-dire fournir un exemple contraire. Vers 1988, N. ELKIES, d'une université américaine, a découvert à l'aide de mathématiques avancées et de gros calculs sur ordinateurs la solution que voici :

$$\begin{aligned} & (2682440)^4 + (15365639)^4 + (18796760)^4 \\ = \; & (20615673)^4. \end{aligned}$$

Bref, la conjecture d'EULER s'était avérée fausse... Pire encore, ELKIES a démontré qu'il y avait une infinité de solutions (entières) à l'équation (6)... On a même proposé depuis des solutions plus "petites", avec des entiers à 5 ou 6 chiffres.

5. Conclusion. Les démonstrations de conjectures, lorsque ça se produit

Tenter de démontrer une conjecture ? Parfois un mathématicien y passe sa vie... Il arrive qu'une conjecture soit démontrée par un mathématicien qui ne connaissait pas (exactement ou complètement) ce qui avait déjà été fait sur le sujet. Attaquer la résolution d'une conjecture peut apporter des mathématiques nouvelles (notions ou techniques nouvelles), avec parfois des connexions inattendues entre différents domaines des mathématiques.

Les conjectures en mathématiques peuvent être plus ou moins spécialisées, plus ou moins sophistiquées dans leurs énoncés. Tout mathématicien professionnel est capable d'en présenter un échantillon. Des mathématiciens célèbres ont même dressé pour le XXI^e^ siècle leur liste de problèmes à résoudre favoris, par exemple S. SMALE [11].

Nous terminons par deux phrases, tirées du même ouvrage référencé en [1]. La première est attribuée à G. CHOQUET par A. CONNES, elle est de fait terrible, la voici : *"On doit, par une approche frontale d'un problème ouvert bien connu, prendre le risque qu'on se souvienne plus de vous par votre échec... que par toute autre chose".*

L'autre, par M. ATIYAH lui-même, constitue le point final de ma communication : "*Some problems open doors, some problems close doors, and some remain curiosities, but all sharpen our wits and act as a challenge and a test of our ingenuity and techniques".*

---

5. Ce type d'équation doit son nom à DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, mathématicien grec probablement du III^e^ siècle, auteur des *Arithmétiques*, traitant de questions de cette nature. FERMAT en était un lecteur très intéressé.

Références

1. M. Atiyah, in *Mathematics : Frontiers and Perspectives,* by the International Mathematical Union. Publications of the American Mathematical Society (2000).

2. D. Borwein and J. Borwein, *Some remarkable properties of sinc and related integrals.* The Ramanujan Journal, 5 (2001), 73-89.

3. J.-B. Hiriart-Urruty, *Potpourri of conjectures and open questions in Nonlinear Analysis and Optimization.* SIAM Review Vol. 49, n° 2 (2007), 255-273.

4. J.-B. Hiriart-Urruty, *A new series of conjectures and open questions in Optimization and Matrix analysis.* ESAIM : COCV 15 (2009), 454-470.

5. J.-B. Hiriart-Urruty, *Le rôle des conjectures dans l'avancement des mathématiques : tours et détours à l'aide d'exemples.* Revue Quadrature, n° 83 (2012), 27-33.

6. J.-B. Hiriart-Urruty, *Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose.* Revue Tangente, n° 168 (2016), 10-11.

7. J.-B. Hiriart-Urruty, *8 conjectures at the undergraduate level,* in Mathematical Tapas, Vol. 2 , Springer (2017).

8. F. Kennard, *Unsolved Problems in Mathematics.* AMS Publishing (2015).

9. R. Varga, *Scientific Computation on Mathematical Problems and Conjectures.* SIAM Publications (1990).

10. H. Schmid, *Two curious integrals and a graphical proof.* Elemente der Mathematik 69 (2014), 11-17.

11. S. Smale, *Mathematical problems for the next century.* Math. Intelligencer 20, pp. 7-15 (1998).

12. Revue Tangente, n°179 (novembre-décembre 2017), 48.