Propos elliptiques...

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Institut de mathématiques
Université Paul Sabatier de Toulouse
E-mail : jbhu@math.univ-toulouse.fr

www.math.univ-toulouse.fr/ ˜jbhu/

Introduction.

Nous sommes avec un groupe d'amis en train de visiter les arènes d'Arles... Ces arènes ne sont pas circulaires, cela se voit immédiatement, elles ont une forme d'un cercle dilaté dans un sens, d'*ellipse* hasardais-je à commenter à mes amis... La terminologie avancée d'ellipse ne choque pas, elle est même reconnue par certains du groupe... Aussi, je me lance à aller plus loin et leur pose la question suivante : si les demi-axes de cette ellipse (termes dont je donne sur place une définition et des explications avec les mains) ont pour longueur a et b, quelle serait l'aire (j'utilise pour eux plutôt le mot surface) des arènes ? Et là, deux amis, qui avaient une formation d'ingénieur scientifique, répondent qu'ils souvenaient que c'était πab ... J'étais un peu étonné et, du coup je m'enhardis et leur pose une nouvelle question : et la longueur du pourtour des arènes, quelle serait-elle ? Il y eut quelques tentatives de réponses, toutes fausses, et pour cause : il n'y a pas de formule simple (c'est-à-dire, avec juste des opérations basiques sur a et b) donnant ce périmètre ... Ce n'était donc pas une formule oubliée, mais bien une question plus profonde. Nous allons analyser ce problème, donner les aproximations du périmètre de l'ellipse par des formules simples que les mathématiciens et les ingénieurs ont trouvées au cours du temps. Mais avant cela, voyons comment le monde des coniques est perçu par le grand public.

Figure 1. Les arènes d'Arles

1. Vous avez dit coniques ?

Les trois coniques principales, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, sont des courbes que les mathématiciens, physiciens, ingénieurs connaissent bien pour les avoir étudiées lors de leurs formations ou bien pour les utiliser dans leur travail (dans le domaine du spatial par exemple), mais les appellations apparaissent aussi dans le langage courant ... Hasardons-nous à un florilège, sur un ton humoristique, ça va de soi.

Parabole.

"Et Jésus dit à ses disciples $y = x^2$, mais nous ne comprendrez pas ... c'est une *parabole*" ...

Un étudiant, à qui nous expliquions ce qu'était le foyer d'une parabole et que *chaque parabole ayait un foyer,* nous rétorqua : "dans mon quartier, c'est le contraire ... *chaque foyer a une parabole*" ...

La forme "parabolique" est bien comprise du grand public puisqu'on parle, par exemple, de miroir parabolique (au four d'Odeillo dans les Pyrénées-Orientales), de skis paraboliques, ou encore de vol parabolique ...

Hyperbole.

Des étudiants me l'ont écrit *hyperball* ou encore, plus important que le superbowl sans doute, l'*hyperbowl* ...

Ellipse.

C'est sans doute celle des trois principales coniques dont le nom et l'adjectif associé (elliptique) sont le plus répandus : on parle de propos elliptiques (titre de cette note) mais aussi, depuis quelques années, de *vélos elliptiques*. Peu de gens savent, y compris parmi les vendeurs de tels appareils, que ces vélos d'intérieur sont appelés ainsi parce que la courbe ou trajectoire suivie par les pédales est une ellipse, au lieu d'un cercle dans un vélo traditionnel. Des squares publics, des jardins, des arènes, etc. ont des formes d'ellipses, dont le Colisée à Rome, les arènes d'Arles ou de Nîmes, la place appelée Ellipse précisément à Washington, etc. Une des amies du groupe visiteur évoqué en introduction s'est même placée au point qui semblait être l'un des deux foyers de l'ellipse des arènes d'Arles et s'exclama : "La femme au foyer, c'est ici !".

La forme harmonieuse de l'ellipse, la facilité avec laquelle on peut la tracer au sol (la méthode dite "du jardinier") sont sans doute les raisons de son succès.

2. L'ellipse : la surface de l'ovale qu'elle délimite

Les équations cartésiennes, paramétriques ou polaires des ellipses sont simples, tout ressemble au cercle sauf que nous avons deux longueurs fondamentales (les dits demi-axes a et b (on prendra toujours $a \geqslant b > 0$)) au lieu d'un seul (le rayon r). Alors, le calcul de l'ovale que délimite l'ellipse est simple, il se fait de multiples façons : par le calcul d'une intégrale de fonction continue sur un segment de droite (ceci, dès les classes de Terminales), à l'aide d'une intégrale curviligne, via un changement de variables dans une intégrale double (dès les deux premières années post-Bac), etc. Bref, le résultat est πab, et sa ressemblance avec la surface πr^2 du disque délimité par un cercle de rayon r font qu'on le retient très facilement.

3. L'ellipse : sa longueur

3.1 Un survol de quelques résultats d'approximation

Dans l'épisode que je racontais en introduction, les tentatives de réponses pour la longueur d'une ellipse de demi-axes a et b, furent sous forme dubitative :

$\pi(a+b)$? Normal puisque cela donne $2\pi r$ lorsque $a = b = r$, c'est-à-dire lorsque l'ellipse est un cercle ;

$2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$? Pas idiot non plus puisque cela redonne $2\pi r$ lorsque $a = b = r$.[1]

Mais qu'en est-il exactement ?

1. Dans quelques sites web - j'en ai repéré quelques uns - cette formule est proposée comme donnant le périmètre *exact* d'une ellipse. Il n'en est rien, c'est vraiment une approximation, laquelle peut être grossière si b est petit devant a.

La longueur exacte $L(a,b)$ du pourtour de l'ellipse de demi-axes a et b résulte, elle aussi, d'un calcul intégral ; elle vaut exactement :

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}\; dt \qquad (1)\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-E^2\sin^2\theta}\; d\theta \ \ \text{(après un simple changement de variable)}\\ &= 2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 E^2-\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\right)^2\frac{E^4}{3}-\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\right)^2\frac{E^6}{5}....\right] \end{aligned}$$

(on continue de sommer indéfiniment ; c'est la série de MacLaurin (1742)),

où $E=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ représente ce qu'on appelle l'*excentricité* de l'ellipse.[2]

Figure 2. Les ellipses suivant leur excentricité

Mais que ce soit via une intégrale ou une série, le résultat invoque la sommation d'une infinité de termes... Les mathématiciens ont une relation particulière avec l'infini : dans beaucoup de leurs résultats, il y a "un passage à la limite", résultant d'un paramètre qui tend vers l'infini ou, au contraire, vers zéro (ce qui, en prenant l'inverse du paramètre, revient au même). Si on veut une approximation numérique de l'intégrale ou de la série, il n'y a pas de difficultés de nos jours : un calcul sur ordinateur peut fournir cette valeur approchée, avec la précision (contrôlée) que l'on veut. Mais notre propos n'est pas celui-là, c'est de donner une approximation de $L(a,b)$ qui soit simple (c'est-à-dire, avec juste des opérations élémentaires sur a et b). Cela a préoccupé depuis l'antiquité les mathématiciens et les utilisateurs des mathématiques. Voici quelques unes de ces formules d'approximation :

- Kepler (1609), dont on comprend qu'il ait eu besoin de ce type d'approximation dans ses études d'orbites de planètes, propose d'utiliser la moyenne arithmétique ou la moyenne géométrique de a et b :

$$L(a,b)\approx 2\pi\sqrt{ab} \text{ et } L(a,b)\approx 2\pi\,\frac{a+b}{2}=\pi(a+b). \qquad (2)$$

Kepler avait l'idée que $2\pi\sqrt{ab}$ minorait $L(a,b)$. En effet, la surface de l'ovale délimitée par une ellipse de demi-axes a et b est πab (*cf.* paragraphe 2), c'est-à-dire la même que celle d'un disque de rayon $\sqrt{ab}$; comme, à surfaces égales, le cercle a un plus petit périmètre[3], on a bien la minoration annoncée.

2. Ce coefficient, compris entre 0 et 1, mesure, en quelque sorte, la proximité de la forme de l'ellipse avec celle du cercle. Quand E est petit (c'est-à-dire a voisin de b), l'ellipse ressemble à un cercle (celui-ci correspond au cas limite où $E=0$) ; quand E est grand (c'est-à-dire b petit devant a), c'est que l'ellipse a une forme aplatie et allongée. Sur un tracé d'ellipse, E est le rapport entre la distance FF' (entre les foyers) et la longueur du grand axe.

3. Parmi les ovales elliptiques (c'est-à-dire délimitées par des ellipses) de surface $S>0$ donnée, le cercle de rayon $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ est de périmètre minimal. Comme souvent en pareil cas, la démonstration repose sur la comparaison entre moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres réels positifs a et b.

- Euler proposa

$$L(a,b) \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \pi\ \sqrt{2(a^2+b^2)}. \tag{3}$$

Déjà, nous avons un premier encadrement de la vraie valeur $L(a,b)$ puisqu'on démontre facilement à partir des expressions de (1) :

$$\pi(a+b) \leqslant L(a,b) \leqslant \pi\ \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Au fur et à mesure que l'Analyse se développe, au XVIII^e et XIX^e siècle, les formules d'approximation se multiplient, très sophistiquées parfois :

- Sipos (1792) :

$$L(a,b) \approx 2\pi \frac{(a+b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}. \tag{4}$$

- Cesaro (1883) :

$$L(a,b) \approx \pi(a+b) + \frac{\pi}{4}\frac{(a-b)^2}{a+b}. \tag{5}$$

- Muir (1883)

$$L(a,b) \approx 2\pi \left[\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{2}\right]^{2/3}. \tag{6}$$

- Peano, Boussinesq (1889) :

$$L(a,b) \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]. \tag{7}$$

- Ramanujan (1914), première formule :

$$L(a,b) \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]. \tag{8}$$

- Ramanujan, deuxième formule :

$$L(a,b) \approx \pi \left[(a+b) - \frac{3(a-b)^2}{10(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right]. \tag{9}$$

Ramanujan a proposé ces formules dans des notes manuscrites qu'il a laissées ; il disait y être arrivé de manière empirique ... Mais il y en a d'autres, bien sophistiquées parfois ([1, 2]).

Dans toute formule d'approximation, outre sa simplicité d'utilisation, l'important est la qualité de l'approximation, c'est-à-dire le contrôle de l'erreur commise. Dans les formules d'approximation de $L(a,b)$, un rôle important est joué par le rapport des demi-axes a/b, ou l'excentricité $E = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, ou encore le coefficient $q = \frac{a-b}{a+b}$ (compris entre 0 et 1 comme l'excentricité). C'est d'ailleurs avec ce coefficient q que sont souvent exprimées les formules de comparaison de $L(a,b)$ à $\pi(a+b)$; par exemple : $\frac{L(a,b)}{\pi(a+b)}$ est $\sqrt{1-q^2}$ pour la première formule de Kepler, $\sqrt{1+q^2}$ pour celle d'Euler, $3-\sqrt{4-q^2}$ pour la première formule de Ramanujan, etc.

3.2 la qualité de l'approximation de la deuxième formule de Ramanujan

Les formules de Ramanujan sont encore utilisées et conseillées dans les sciences de l'ingénieur (voir [3, p. 81] par exemple). La qualité de cette approximation, vérifiée en pratique lorsque l'excentricité E est modérée (l'erreur relative est annoncée en $3E^{20}/2^{36}$ dans [3, p. 81]), est mesurée grâce au résultat mathématique précis que voici.

Theorème ([4]). La deuxième formule de Ramanujan donne une approximation de $L(a, b)$ par valeurs inférieures ; l'erreur commise est :

$$\epsilon(a, b) = \pi(a + b)\ \theta(q)\ q^{10}, \tag{10}$$

où la fonction $\theta(q)$ est croissante lorsque q va de 0 à 1, tout en étant encadrée comme suit :

$$\frac{3}{2^{17}} < \theta(q) \leqslant \frac{14}{11}\left(\frac{22}{7} - \pi\right). \tag{11}$$

On notera dans la formule (11) l'intervention, un peu surprenante de l'écart entre $\frac{22}{7}$ et π, sachant qu'on sait depuis Archimède que $\frac{22}{7}$ est une approximation par excès de π.

3.3 Et dans la vie de tous les jours ?

Nous avons posé la question de l'utilisation des coniques, notamment de l'ellipse, autour de nous : au CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), à Airbus (ex-EADS), etc. Ces courbes y sont connues, utilisées parfois ; les questions posées à propos des trajectoires elliptiques sont celles du calcul de la période orbitale d'un satellite par exemple ; ou encore il s'agit de déterminer l'ellipse de plus petite surface contenant des débris de satellite.

En dimension trois, dans l'espace donc, les mêmes questions d'approximation de l'aire surfacique d'un ellipsoïde se posent, alors que la formule donnant le volume reste aussi simple, $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Pour en savoir plus sur cette question, *cf.* [5] par exemple.

4. En guise de conclusion

Les coniques restent des courbes fascinantes, qui ont enchanté des générations et des générations de scientifiques et d'ingénieurs. Elles continuent à le faire. Dans la présente note, nous avons voulu montrer que des questions aussi simples que celle du calcul du périmètre de l'ellipse pouvaient donner lieu à des études simples comme compliquées.

Références

[1] G.Almkvist and B.Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, pi, and the* Ladies Diary. American Math. Monthly, 585-608 (1988).

[2] R.Barnard, K.Pearce and L.Scovanec, *Inequalities for the perimeter of an ellipse.* J. of Math. Analysis and Applications 260, 295-306 (2001).

[3] L.Rade et B. Westergren, *Mathematics handbook for science and engineering,* 5th edition, Springer (2004).

[4] M.Villarino, *A note on the accuracy of Ramanujan's aproximate formula for the perimeter of an ellipse.* J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol.7, n°1, 1-10 (2006).

[5] G.Tee, *Surface area and capacity of ellipsoids in n dimensions,* New Zealand J. Math. 34, 165-198 (2005).