LE RÔLE DES CONJECTURES DANS L'AVANCEMENT DES MATHEMATIQUES : TOURS ET DETOURS A L'AIDE D'EXEMPLES

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY
Institut de mathématiques
Université PAUL SABATIER
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 9, France

www.math.univ-toulouse.fr/ ~jbhu/

RÉSUMÉ. A l'aide de quelques exemples, nous illustrons le rôle que peuvent jouer les conjectures dans l'avancement des mathématiques. Les exemples ont été choisis dans divers domaines des mathématiques ; ils sont d'énoncés suffisamment simples et explicites pour être compris par le plus grand nombre.

MOTS-CLÉS. *Conjectures, défis mathématiques, histoire des mathématiques.*

Introduction

Conjecture... si on ouvre un dictionnaire quelconque à ce mot, voici la définition qu'on trouve : hypothèse formulée sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ne connaît pas encore la démonstration. En d'autres termes, c'est une "question ouverte" pour laquelle une affirmation a été prononcée : "oui, je pense que cette assertion est vraie", ou, ce qui a la même force logique, "non, je conjecture que cet énoncé est faux". En mathématiques, comme dans d'autres sciences, les conjectures ont toujours joué un rôle de stimulant. Nous allons illustrer cela à l'aide de quelques exemples, dont certains sont extraits de deux articles que nous avons eu l'occasion d'écrire sur le sujet ces dernières années [1, 2]. Avant d'aller plus loin, éradiquons la faute qui consiste à confondre les mots *conjecture* et *conjoncture* [1]. Ensuite, situons-nous bien dans un contexte : chaque domaine des mathématiques a ses conjectures, plus ou moins connues, plus ou moins compréhensibles... Ce qui suit correspond donc à certaines parties des mathématiques, que je connais mieux que d'autres. Il y a donc dès le départ une affaire de choix ou de goût : telle ou telle conjecture énoncée dans un domaine donné sera considérée essentielle par un spécialiste du dit domaine, mais sera jugée insipide et sans grand intérêt par un collègue versé dans un autre domaine...

Qu'est-ce qu'une conjecture célèbre ? C'est, me semble t-il, une affirmation qui vérifie les trois propriété suivantes :

[1] Lors de la remise du Prix FERMAT de recherche 1995 à ANDREW WILES, en octobre 1995 à la mairie de Toulouse, une éphémère Secrétaire d'Etat à la Recherche nous avait "bassinés" tout au long de son discours avec la "conjoncture de FERMAT"...

- L'énoncé en est **simple**, **compréhensible** par le plus grand nombre de mathématiciens, voire de non mathématiciens. La grande conjecture de P.Fermat, jusqu'à sa démonstration par A.Wiles et R.Taylor en 1994, en était un exemple parfait[2].

- Avoir **résisté** (assez) **longtemps** aux assauts des mathématiciens professionnels

- Avoir **engendré de nouvelles mathématiques** à travers les différentes tentatives de résolution.

L'image (de jeux de fêtes foraines ou de casinos) qui me vient à l'esprit est celle de certaines machines à sous, où l'objectif est de faire tomber des pièces de monnaie à partir de présentoirs où elles sont disposées (sous verre), à l'aide de quelques mouvements autorisés (et commandées de l'extérieur de l'appareil). Lorsqu'on voit ça, la première réaction est de se dire : "Je vois comment faire, je vais y arriver...". En conséquence, on joue, on insiste, on s'énerve... et on abandonne. La personne qui vous suit a la même réaction que la vôtre initiale : "Il s'y est mal pris, moi je vois comment faire..." ; à son tour, il joue en essayant autre chose, insiste, et finit par abandonner...

Par goût pour ces choses-là, mais aussi parce qu'elles avaient un intérêt dans les domaines des mathématiques que je suis, j'ai recherché, "nettoyé", mis en perspective, parfois transformé en formes équivalentes (et tout aussi intéressantes) quelques conjectures. Je vais en présenter quelques-unes ici, en indiquant si possible leur intérêt et où on en est dans leur résolution. Je termine cette introduction par cette phrase de Sir M.Atiyah [3] : *"Some problems open doors, some problems close doors, and some remain curiosities, but all sharpen our wits and act as a challenge and a test of our ingenuity and techniques".*

1. La conjecture sur les solides convexes d'épaisseur constante (Domaines : Géométrie, Analyse et calcul variationnels, Optimisation de formes)

Question : *"Quels sont les convexes de largeur (ou épaisseur) constante de mesure minimale"* [3]. Dans le plan tout d'abord (en 2D comme disent les ingénieurs), cette question, qui a excité les plus grands mathématiciens est complètement résolue. Déjà L.Euler avait considéré ces convexes du plan de largeur constante qu'il appelait des *orbiformes.* Ils ont des formes très variées, du disque au triangle curviligne de F.Reuleaux, et sont utilisés comme modèles de pièces mécaniques ou de hublots d'avion. W.Blaschke et H.Lebesgue ont démontré que parmi les convexes du plan de largeur constante, c'était le triangle de Reuleaux qui était d'aire minimale. Les techniques utilisées sont celles des séries de J.Fourier. Une démonstration différente, très récente, basée sur les résultats et techniques du Contrôle optimal, est due à mon jeune collègue T.Bayen.

[2] Comme d'autres collègues, j'ai dans mon bureau une caisse entière de "démonstrations" de ce théorème, reçues depuis des années, souvent des "bouillies" incompréhensibles (où le distinguo sur la puissance n, $n \geqslant 3$ ou pas, dans l'équation $x^n + y^n = z^n$) n'apparaît même pas... Cela a un côté sympathique, parfois pathétique. J'ai renoncé à regarder ces pseudo-démonstrations, malgré l'insistance ou la paranoïa de leurs auteurs. Je leur fais une réponse type : "Commencez par montrer ce que vous avez fait à un mathématicien professionnel de l'université la plus proche... ".

[3] Un convexe du plan est dit de largeur constante lorsqu'il peut être coincé entre deux droites parallèles dont l'écartement est le même quelle que soit l'orientation de ces droites parallèles. Pour un convexe de l'espace, la définition est semblable, les droites étant remplacées par des plans.

Dans l'espace (en 3D), la situation est complètement différente : on connait des solides convexes d'épaisseur constante (ils sont appelés *sphéroformes*) autres que des boules, mais on ne sait pas lesquelles sont de volume minimal. Il y a tout de même un candidat, c'est le sphéroforme de E.Meissner. Proposé par ce mathématicien il y a plus de quatre-vingts ans, ce sphéroforme est une sorte de tétraèdre régulier dans lequel on aurait soufflé de l'air, avec des parties sphériques mais également toroïdales[4]. La conjecture posée est donc : le sphéroforme de Meissner est celui de volume minimal. Avec T.Bayen, nous avons commis un article pédagogique présentant en détail ces problèmes, dans le plan comme dans l'espace [4]. Récemment, on m'a offert un sphéroforme de Meissner, de 30 cm d'épaisseur (constante), en résine synthétique, que je conserve dans mon bureau. J'ai beau le contempler, le palper, cela ne me donne aucune idée pour essayer d'avancer dans la résolution du problème posé. J'avais même pensé que je pourrais proposer le sphéroforme de Meissner pour une sculpture apposée entre les trois bâtiments de mon institut de mathématiques : chacun le verrait avec la même épaisseur (analystes, géomètres, probabilistes, etc.), quel que soit le bâtiment où l'étage où il se trouve. Avouez qu'il est difficile d'être plus consensuel chez les mathématiciens...

Qu'apporte cette conjecture dans l'avancement des mathématiques, quelles conséquences aurait sa résolution ? Du point de vue calcul variationnel, c'est un problème "vicieux" au sens qu'il accumule toutes les difficultés qu'on peut imaginer (convexité "à rebours" de la fonction-objectif, contraintes difficiles à prendre en compte) ; y voir un peu plus clair aiderait à obtenir des "certificats d'optimalité" dans des problèmes variationnels non convexes. Des progrès ont été accomplis dans ce sens, y compris très récemment... et, chaque fois, le sphéroforme de Meissner satisfait les conditions nécessaires d'optimalité exhibées. On pourrait aussi aborder la question du point de vue purement calcul scientifique : appliquer brutalement et massivement (à la version discrétisée du problème) les algorithmes les plus puissants connus et voir si on voit apparaître le solide de Meissner... C'est ce qui a été suggéré dans [5], sans réponse convaincante à ce jour.

2. La conjecture sur le cheminement minimal le long des arêtes d'un polytope convexe (Optimisation linéaire, Calcul scientifique)

Ceci concerne les polytopes convexes de $\mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire les polyèdres convexes compacts d'intérieur non vide) et la manière de minimiser une fonction linéaire sur eux (ce domaine est répertorié comme celui de la Programmation ou Optimisation linéaire). Voici une présentation succincte de la conjecture sur le cheminement minimal le long des arêtes d'un polytope convexe, telle que formulée par W.M.Hirsch en 1957.

Si x et y sont les sommets d'un polytope convexe P, appelons $\delta_P(x, y)$ le plus petit entier k tel que x et y puissent être joints en suivant un chemin formé de k arêtes. Ensuite, ce qu'on appelle le *diamètre de* P est le maximum des $\delta_P(x, y)$ lorsque x et y parcourent les sommets de P. Enfin, pour $n > d \geqslant 2$, on désigne par $\Delta(d, n)$ le diamètre maximal des polytopes convexes P de $\mathbb{R}^d$ comportant n facettes. Par exemple, dans le plan, c'est-à-dire pour $d = 2$, il est facile de vérifier "à la main" que $\Delta(2, n)$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

[4] A ne pas confondre avec un autre solide convexe qui fait le "buzz" sur Internet depuis 2007 : *le gömböc*.

Par ailleurs, en considérant le polytope particulier $P = [-1, +1]^d$ de $\mathbb{R}^d$ (lequel a $n = 2d$ facettes), on se rend compte que $\Delta(2, 2d) \geqslant d$.

La conjecture de HIRSCH s'énonce comme suit :

$$\text{Pour tout } n > d \geqslant 2, \quad \Delta(d, n) \leqslant n - d. \tag{1}$$

Bien que cela ne soit pas évident, la conjecture de HIRSCH serait assurée si on pouvait la démontrer dans le cas particulier où $n = 2d$, c'est-à-dire : a-t-on $\Delta(d, 2d) \leqslant d$?, d'où le nom de "d-conjecture" parfois utilisée pour parler de cette conjecture. Comme $\Delta(2, 2d) \geqslant d$ (voir plus haut), le majorant suggéré est certainement le meilleur possible. Ainsi, la d-conjecture peut être formulée de la manière équivalente suivante :

$$\text{Pour tout } d \geqslant 2,\ \Delta(d, 2d) = d. \tag{2}$$

Comme souvent dans la tentative de résolution de conjectures, on commence par traiter des cas particuliers, ou bien on les relie à des problèmes connexes où les choses sont mieux connues. Ainsi : la conjecture de HIRSCH, telle que formulée en (1), fut démontrée pour $d \leqslant 3$ et tout n, pour tout couple (n, d) vérifiant $n \leqslant d + 5$; la d-conjecture, telle que formulée en (2), fut démontrée pour $d \leqslant 5$.

La d-conjecture restait donc ouverte pour $d \geqslant 6$. De plus, l'opinion générale chez les spécialistes du sujet était que la conjecture était fausse pour des d assez grands. Et ce jusqu'en mai 2010 où, tandis que je préparais ces lignes, un coup de tonnerre se fait entendre d'Espagne : la conjecture de HIRSCH (ou la d-conjecture) est fausse ! Un contre-exemple est dû à F.SANTOS (Université de Cantabrie à Santander) : cet auteur a construit un polytope convexe à $n = 86$ facettes dans $\mathbb{R}^{43}$ dont le diamètre est strictement supérieur à 43 (contredisant ainsi l'inégalité (1)). Ceci fut annoncé d'abord dans un colloque, puis la nouvelle se répandit rapidement par internet [8]. Une conséquence est que SANTOS a été submergé de messages de félicitations et d'invitations à donner des conférences[5]. C'est le lot des conjectures qui ont un certain impact : une certaine notoriété est assurée, rarement la fortune...

En tout cas, la conjecture de HIRSCH n'en est plus une, c'est sa négation qui devient un théorème.

3. Les conjectures à partir des points les plus proches et les plus éloignés d'un ensemble fermé (Analyse réelle, Approximation)

Les deux questions qui vont suivre sont voisines, du moins par leur formulation. Elles concernent l'Analyse réelle, la théorie de l'Approximation plus précisément.

3.1 La conjecture des points les plus proches

Soit $(H, (.\,|\,.))$ un espace de Hilbert réel, muni de la norme $\|.\|$ dérivée du produit scalaire $(.\,|\,.)$, soit S un ensemble fermé non vide de H. Pour tout x de H, on désigne par

[5] Après une première circulation de ce texte, F. SANTOS m'a fait savoir qu'un article pour mathématiciens non spécialistes est parue dans *la Gaceta de la RSME*, et qu'un article plus technique est à paraître dans *Annals of Mathematics*. Son site web personnel (http ://personales.unican.es/santos/Hirsch) recense également les compte-rendus que la presse a pu faire de cette réfutation de la conjecture de HIRSCH.

$\mathbb{P}_S(x)$ l'ensemble des points de S à distance minimale de x (on dit aussi l'ensemble des projections de x sur S), c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_S(x) = \{s \in S \mid \|x - s\| = d_S(x)\},$$

où $d_S(x)$ désigne la distance de x à S, définie par

$$d_S(x) = \inf_{s \in S} \|x - s\|.$$

L'ensemble $\mathbb{P}_S(x)$ est éventuellement vide (car on est dans un contexte d'espace de dimension infinie). Lorsque $\mathbb{P}_S(x)$ est réduit à un seul élément (on dit aussi que $\mathbb{P}_S(x)$ est un singleton), on utilise la notation $\mathbb{P}_S(x) = \{P_S(x)\}$.

Si S est de plus *convexe*, nous savons (et nous enseignons même) que $\mathbb{P}_S(x) = \{P_S(x)\}$ pour tout $x \in H$; P_S est alors appelé l'opérateur de projection sur S.

La première question posée concerne la réciproque de cette assertion :

$$(\mathbb{P}_S(x) \text{ est un singleton pour tout } x \in H) \overset{?}{\Longrightarrow} (S \text{ est convexe}). \tag{3}$$

Si H est de dimension finie, la réponse est connue et positive depuis L.Bunt (1934) et T.Motzkin (1935) ; les démonstrations, variées, font les délices des poseurs de sujets de concours (de CAPES ou d'agrégation par exemple). Dans sa forme générale, c'est-à-dire (3), la question fut posée par V.Klee vers 1961, et celui-ci conjecturait que la réponse était non. A ce jour, la question n'a pas été complètement résolue, c'est-à-dire : il n'y a pas de démonstration de l'implication (3), et personne n'a proposé d'exemple d'ensemble fermé non convexe S pour lequel $\mathbb{P}_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in H$. Bien sûr, maintes contributions ont été apportées au problème, principalement sous le format suivant : si on ajoute une condition supplémentaire sur S (relative à sa topologie, à l'application P_S), alors oui l'implication (3) est vraie.

Nous-même avons étudié cette question en la transformant en un problème équivalent relatif à la différentiabilité (au sens de R.Gâteaux, de M.Fréchet, etc.) de la fonction distance d_S ou de son carré. Ce faisant, nous avons simplement déplacé le "trou" entre condition nécessaire et condition suffisante. Si la Gâteaux-différentiabilié et la Fréchet-différentiabilité de d_S étaient équivalentes (sous l'hypothèse de (3)), la question serait résolue... Or ce n'est pas le cas.

3.2 La conjecture des points les plus éloignés

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, mais ça peut être un espace de Hilbert $(H, (.\,|.))$ comme précédemment, soit S un ensemble fermé borné non vide de H (convexe même). Pour tout x de H, on désigne par $\mathbb{Q}_S(x)$ l'ensemble des points de S à distance maximale de x (*i.e.*, l'ensemble des points de S les plus éloignés de x), c'est-à-dire :

$$\mathbb{Q}_S(x) = \{s \in S \mid \|x - s\| = \Delta_S(x)\}$$

où l'éloignement maximal $\Delta_S(x)$ de x à S est définie par

$$\Delta_S(x) = \sup_{s \in S} \|x - s\|.$$

La question posée est la suivante :

$$(\mathbb{Q}_S(x) \text{ est un singleton pour tout } x \in H) \overset{?}{\Longrightarrow} (S \text{ lui-même est un singleton}). \qquad (4)$$

Comme pour la question précédente, la réponse est positive et connue depuis longtemps en dimension finie (elle est d'ailleurs assez facile à obtenir), mais formulée dans le contexte général d'un espace de dimension infinie (toujours par V.KLEE vers 1961), la question est sans réponse à ce jour. Ici, la convexité de la fonction Δ_S et de son carré Δ_S^2 est acquise sans hypothèse supplémentaire (c'est gratuit !). Nous avons nous-même étudié cette question et l'avons transformée en une question de GÂTEAUX *vs* FRÉCHET-différentiabilité de la fonction convexe Δ_S^2 ; cela dit, le "trou" entre ces deux notions de différentiabilité reste important même pour des fonctions convexes.

Qu'apporterait à l'Analyse une réponse aux deux questions posées au-dessus ? Rien d'essentiel certes, ça changerait un peu la structure de certains problèmes posés en théorie de l'Approximation. Qui peut répondre aux questions posées, soit en démontrant l'implication (4) soit en la niant en exhibant un contre-exemple "tordu" ? Assurément un virtuose de l'Analyse... La reconnaissance du milieu (et une certaine notoriété) lui sont promises.

4. Conjecture sur la borne inférieure du produit scalaire de vecteurs de signes et de vecteurs unitaires (Probabilités, Combinatoire)

Considérons

- un vecteur unitaire $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire de norme euclidienne (usuelle) égale à 1 ;
- n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi de distribution

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Ce qui est conjecturé est que

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\ a_i\right| \leqslant 1\right) \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} X_i\ a_i$ balaie tout l'intervalle $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$; ce qu'exprime (5) est que la valeur de ce produit scalaire est "concentrée" sur l'intervalle $[-1, +1]$ dans plus de 50 % des cas. On ne peut faire mieux que 1/2 dans la borne inférieure de (5), même lorsque la dimension n est petite (prendre l'exemple de $n = 2$).

Si on n'aime pas les Probabilités, on peut présenter la conjecture sous une forme équivalente, en termes purement combinatoires. Pour $i = 1, ..., n$, soit $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$, de sorte que les 2^n nombres réels $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ...\epsilon_n a_n$ soient distribués sur le segment $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$; alors on conjecture que plus de la moitié d'entre eux se trouvent dans le segment $[-1, +1]$:

$$\frac{\text{Card } \{(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) : \epsilon_i \in \{-1, +1\} \text{ pour tout } i, \text{ et } |\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\ a_i| \leqslant 1\}}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Parmi toutes les interprétations possibles de (6), en voici une qui est très parlante. On partage la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (où $a = (a_1, ..., a_n)$ est unitaire, rappelons-le) en deux sommes partielles ; alors au moins la moitié de ces partitions sont approximativement égales, *i.e.* elles diffèrent d'au plus 1. Ecrivons cela plus précisément : Soit I^+ une partie de $\{1, ..., n\}$ et I^- son complémentaire dans $\{1, ..., n\}$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \ a_i = \sum_{i \in I^+} a_i - \sum_{i \in I^-} a_i \ ;$$

alors, suivant (6),

$$\sum_{i \in I^-} a_i - 1 \leqslant \sum_{i \in I^+} a_i \leqslant \sum_{i \in I^-} a_i + 1$$

pour au moins la moitié des possibilités de I^+.

La conjecture que nous venons d'énoncer trouve sa source dans deux domaines différents : en théorie du Contrôle-Automatique (traitant de solutions robustes de systèmes quadratiques incertains) et en Combinatoire-Probabilités. Notre travail a consisté à faire le pont entre les deux formulations, et à informer chaque partie de la contribution de l'autre... La meilleure borne inférieure connue (dans (5) ou (6)) est 3/8... il reste donc encore un effort de $12,5$ % à faire pour arriver à 1/2 et valider la conjecture, ou bien à trouver un contre-exemple.

Sans attendre le résultat ultime, il arrive à cette conjecture (comme à d'autres) qu'on énonce des résultats "conditionnels" : "Si la borne inférieure est acquise, alors d'autres bornes s'ensuivent, utiles pour contrôler l'incertitude dans certains systèmes à contrôler".

5. Conjecture sur le déterminant de matrices normales (Calcul matriciel)

L'Algèbre linéaire ou le Calcul matriciel se prêtent également bien à la formulation de conjectures faciles à comprendre. Celle de ce paragraphe comme celle du suivant concernent précisément ce domaine des mathématiques.

Rappelons au préalable qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *normale* si elle peut être diagonalisée à l'aide d'une matrice unitaire. Il y a des dizaines de caractérisations de la normalité d'une matrice... Signalons simplement que sont normales les matrices hermitiennes, antihermitiennes, unitaires. La conjecture déterminantale de M.Marcus (1973), énoncée de manière indépendante par G.N.De Oliveira en 1982 (*cf.* [10]) (la conjecture OMC en abrégé) s'énonce comme suit :

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ normales, de valeurs propres prescrites $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et $\mu_1, ..., \mu_n$ respectivement, alors : $\det(A - B)$ appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble $\left\{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_{\sigma(i)}) \ : \sigma \text{ permutation de } \{1, ..., n\}\right\}$. (7)

Bien que la conjecture OMC ait été vérifiée pour bien de sous-classes de matrices normales, sous sa forme générale elle tient toujours.

6. Conjecture sur la norme de l'inverse d'une matrice aux données incertaines (Calcul matriciel

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, aux données $a_{i,j}$ incertaines au sens suivant : $a_{i,j} \in [0,1]$ pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$. On désigne par $\|.\|_F$ la norme matricielle de G.Frobenius (*i.e.*, celle évaluée par $\|M\|_F = \sqrt{\text{trace}(M^T M)}$). La conjecture annoncée, due à N.J.A.Sloane et M.Harwith (1976), s'énonce comme suit :

$$\left\|A^{-1}\right\|_F \geqslant \frac{2n}{2n+1}. \tag{8}$$

Elle trouve son origine en Optique et Statistique. On connait des cas d'égalité dans (8), pour une certaine classe de matrices (dites de J.Hadamard). Comme on le voit, la formulation en est très simple, et pourtant l'inégalité n'est toujours ni confirmée ni infirmée à ce jour.

7. Conjecture (ou Hypothèse) de Riemann (Analyse, Théorie des nombres)

La Théorie des nombres est un domaine ou foisonnent des conjectures, des formulations les plus simples (n'est-ce pas Fermat ?) aux plus compliquées [6]. Mentionnons en passant deux des plus célèbres :

- La conjecture de C.Goldbach (1742) : "Tout entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (le même nombre premier pouvant être utilisé deux fois)" ; sous une forme plus imagée : "Tout entier strictement supérieur à 2 est la moyenne arithmétique de deux nombres premiers". Une majorité des mathématiciens spécialistes du sujet pensent que c'est vrai.

- La conjecture sur l'infinitude des nombres premiers jumeaux (*i.e.,* de la forme n et $n + 2$) : "Il y a une infinité de nombres premiers n tels que $n + 2$ soit aussi premier". Pour les (jeunes et dynamiques) sexagénaires, voici une friandise (qu'on m'a offerte récemment) : 60 est la somme de deux couples de nombres premiers jumeaux, $60 = 11{+}13{+}17{+}19$, ou la somme de deux nombres premiers jumeaux, $60 = 29{+}31$.

Mais la conjecture la plus célèbre, celle qui domine toutes les autres, qui assurera célébrité et fortune à celui qui y répondra est la conjecture de G.Riemann (1859) (on dit aussi, et plus fréquemment,"l'hypothèse de Riemann"). Sous sa forme basique, elle exprime que la fonction ζ de Riemann (prolongement analytique en une fonction holomorphe définie pour tout nombre complexe z autre que 1, de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$) a tous ses zéros non triviaux situés sur la droite d'équation $\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}$ ([7]). Un des côtés fascinants de cette conjecture est qu'elle peut être reliée à divers domaines des mathématiques, comme cela est bien expliqué dans l'excellent article de synthèse [11]. Un autre aspect est qu'elle a été vérifiée pour les premiers millions de zéros de ζ (les 10^{23} premiers zéros en fin 2004, probablement bien plus aujourd'hui). On raconte

[6]Le mathématicien J.-P.Serre a son nom qui est associé à plusieurs conjectures... Je l'ai entendu dire une fois en conférence qu'il vaudrait mieux donner à ces conjectures des noms de stations de métro parisien, la "conjecture Réaumur-Sébastopol par exemple"...

[7]Les $-2n$, pour $n \geqslant 1$, sont appelés les zéros triviaux de ζ car leur existence est relativement facile à démontrer.

que le mathématicien HILBERT, interrogé sur la première chose qu'il demanderait après un sommeil de plus de cinq cents ans, répondit que ce serait : "Quelqu'un a-t-il résolu la conjecture de RIEMANN ?". Tout aussi étonnantes sont les formes diverses *équivalentes* que peut prendre la conjecture de RIEMANN, dans pratiquement tous les domaines des mathématiques. Notre forme équivalente favorite est celle de J.C.LAGARIAS [12] [8] ; nous ne résistons pas au plaisir de la présenter.

Soit

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ (appelés parfois nombres réels harmoniques) ;} \\ \sigma(n) &= \sum_{d \text{ divise } n} d, \text{ la somme de tous les diviseurs de } n \ (\sigma(6) = 12 \text{ par exemple).} \end{aligned}$$

Alors :

Forme équivalente de la conjecture de Riemann :

$$\begin{gathered} \text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \sigma(n) \leqslant H_n + \exp(H_n)\ln(H_n), \\ \text{avec égalité seulement pour } n = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Bien sûr, il y a tout un travail profond de mathématiques pour en arriver là, le travail de toute une vie de mathématicien par exemple. Reconnaissons que (9) est très facile à comprendre, même pour un étudiant en mathématiques débutant ; il n'en demeure pas moins qu'y répondre est hors d'atteinte pour l'instant.

Conclusion. Les démonstrations de conjectures, lorsque ça se produit

Tenter de démontrer une conjecture ? Parfois un mathématicien y passe sa vie... Il arrive qu'une conjecture soit démontrée par un mathématicien qui ne connaissait pas (exactement ou complètement) ce qui avait déjà été fait sur le sujet. Attaquer la résolution d'une conjecture apporte des mathématiques nouvelles (notions ou techniques nouvelles), avec parfois des connexions inattendues entre différents domaines des mathématiques.

Les conjectures en mathématiques peuvent être plus ou moins spécialisées, plus ou moins sophistiquées dans leurs énoncés. Tout mathématicien professionnel est capable d'en présenter un échantillon comme nous venons de le faire. Des mathématiciens célèbres ont même dressé pour le XXI-ième siècle leur liste de problèmes à résoudre favoris, par exemple S. SMALE [13]. Leur rôle dans l'avancement des mathématiques dont elle relèvent reste celui que nous avons tenté d'illustrer ici.

Nous terminons par une phrase, tirée du même ouvrage [3] que celle citée dans l'introduction ; elle est attribuée à G. CHOQUET par A. CONNES, elle est de fait terrible, la

[8] Ce même mathématicien vient de sortir un livre compilant ses articles sur un autre conjecture, très célèbre et facile à comprendre aussi : la conjecture dite de SYRACUSE ou "$3x + 1$" (une question de convergence éventuelle d'une suite innocente d'entiers). Voir :

J.C.LAGARIAS, *The ultimate challenge : The 3x+1 problem.* Publications of the American Mathematical Society (2010).

voici : *"On doit, par une approche frontale d'un problème ouvert bien connu, prendre le risque qu'on se souvienne plus de vous par votre échec... que par toute autre chose"*.

Références.

[1] J.-B. Hiriart-Urruty, *Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization.* SIAM Review, Vol. 49, N° 2, pp. 255–273 (2007).

[2] J.-B. Hiriart-Urruty, *A new series of conjectures and open questions in optimization and matrix analysis.* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, pp. 454-470 (2009).

[3] M. Atiyah, in *Mathematics : frontiers and perspectives,* by the International Mathematical Union. Publications of the American Mathematical Society (2000).

[4] T. Bayen et J.-B. Hiriart-Urruty, *Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux.* Ann. Sci. Math. Québec (sous presse).

[5] J.-B. Hiriart-Urruty, *An open global optimization problem.* J. of Global Optimization 45, N°2, pp.335-336 (2009).

[6] J.-B. Hiriart-Urruty, *Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes : L'état de l'art vu via l'analyse convexe non lisse.* Ann. Sci. Math. Québec 22, pp. 47-62 (1998).

[7] J.-B. Hiriart-Urruty, *La conjecture des points les plus éloignés revisitée.* Ann. Sci. Math.Québec 29, pp. 197-214 (2005).

[8] F. Santos, dans
http ://gikalai.worldpress.com/2010/05/10/francisco-santos-disproves-the-hirsch-conjecture/

[9] X. Zhang, *Open problems in matrix theory,* ICCM, Vol. II (December 2007).

[10] G. N. De Oliveira, *Normal matrices (research problem).* Linear and Multilinear Algebra 2, pp. 153-154 (1982).

[11] M. Balazard, *Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann.* La Gazette des mathématiques 126 (Société Mathématique de France), pp. 7-24 (octobre 2010).

[12] J.C. Lagarias, *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis.* The American Mathematical Monthly, Vol. 109, pp. 534-543 (2002).

[13] S. Smale, *Mathematical problems for the next century.* Math. Intelligencer 20, pp. 7-15 (1998).

Remerciements. Je voudrais remercier Michel Balazard (Marseille), Roger Mansuy (Paris) et Maryvonne Spiesser (Toulouse) pour leurs remarques de lecture qui ont permis d'améliorer la première version de ce texte.