Licence Sciences de l'Ingénieur
et
Licence Informatique

Niveau L2 (= $2^{\text{ème}}$ année)

Mathématiques :
Résumé de ce qu'il faut savoir en Algèbre linéaire (ou Calcul Matriciel) au sortir du L1, en préalable au cours d'Algèbre linéaire du L2, concernant :

MATRICES
SYSTÈMES LINÉAIRES
DÉTERMINANTS

par J.-B. HIRIART-URRUTY, Professeur de mathématiques

2007

Table des matières

I. Matrices

I.1. Définitions de base.

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ses éléments seront appelés des **scalaires** (des nombres réels ou complexes). Une **matrice** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire présenté habituellement de la manière suivante :

$$m \text{ lignes } \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \right.$$

où les coefficients a_{ij} sont des éléments de $\mathbb{K}$ (des scalaires donc).

a_{ij} : terme de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

Notation recommandée : LI-CO, ligne puis colonne dans l'indice ij de a_{ij}.

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: notation pour l'ensemble des matrices $m \times n$ (ou (m, n)) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $m = n$, on parlera de matrices carrées et on se contentera de la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Pour certains résultats concernant $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on passera dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ puis on reviendra dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (comme, par exemple, pour la résolution des équations du second degré à coefficients réels).

Dans $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il y a $m \times n$ coefficients. Dans des calculs matriciels en Sciences de l'ingénieur, m et n peuvent atteindre des millions.

I.2. Matrices (très) spéciales.

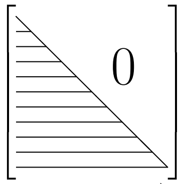
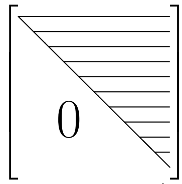
– Les matrices (dites) **scalaires** : $m = n = 1$ et $A = [a]$, où $a \in \mathbb{K}$. On peut identifier $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$.

– La matrice identitée : $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (des 1 sur la diagonale, des 0 partout ailleurs).

Un peu plus général : les matrices (carrées) **diagonales** :

$$diag(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$ ($a_1, \dots, a_n$ sur la diagonale, des 0 partout ailleurs)

Les matrices (carrées) **triangulaires** (inférieures, resp. supérieures)

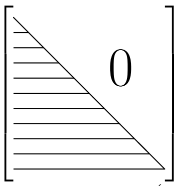
$A =$  ou $A =$ 

$(a_{ij} = 0 \; si \; i < j)$ $\qquad$ $(a_{ij} = 0 \; si \; i > j)$

– Les matrices **unicolonnes** (ou matrices colonnes) : $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$

On peut identifier cette matrice unicolonne avec le vecteur : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^m$.

Matrices unilignes (ou matrices lignes) : définition mutatis mutandis.
$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ comporte $m \times n$ coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$.
La matrice diag $(a_1, \ldots, a_n)$ comporte $n(n-1)$ coefficients nuls ; les n autres coefficients $a_1, \ldots, a_n$ la déterminent.
La matrice triangulaire

$A =$  comporte $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients nuls ; les $\frac{n(n+1)}{2}$ autres coefficients a_{ij} la détermine.

Noter que $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$... qui est aussi $1 + 2 + ... + n$.
Dans une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y a n termes diagonaux et $n^2 - n = n(n-1) = 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ termes non diagonaux.

Exemple:
Matrice des coefficients dans un système linéaire.
Dans $\begin{cases} 5x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4z = 5 \end{cases}$ *(2 équations, 3 inconnues x, y, z)*

la matrice des coefficients des inconnues x, y, z est $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

I.3. Transposition.

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice **transposée** de A, notée A^T ou ${}^tA$ (A^t est à éviter, car génératrice de confusions) est la matrice $n \times m$ dont le terme (i, j) est le terme (j, i) de A (les lignes de A deviennent les colonnes de A^T, les colonnes de A deviennent les lignes de A^T).

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ devient } A^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque A est à coefficients complexes, on définit aussi la **transconjugée** (ou **adjointe**) A^* de A :

$$A^* = \overline{(A^T)} \text{ (ou, ce qui revient au même, } (\overline{A})^T).$$

En bref, on transpose A et on prend les conjuguées des termes de la matrice (ou dans l'ordre inverse). Par exemple,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & i \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \textit{ devient } A^* = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -i & -2i \end{bmatrix}.$$

Une matrice (carrée) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** lorsque $A^T = A$, **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$ (notions qui n'ont d'intérêt que pour des matrices à coefficients réels).

Une matrice (carrée) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **hermitienne** lorsque $A^* = A$, **antihermitienne** lorsque $A^* = -A$ (notion généralisant les deux précédentes au cas complexe).

I.4. Egalité de matrices.

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (les deux matrices sont donc de même format !) sont égales lorsque :

$$a_{ij} = b_{ij} \textit{ pour tout } i = 1, \ldots, m \textit{ et } j = 1, \ldots, n.$$

I.5. Addition de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire.

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (les deux matrices sont donc de même format !) peuvent être additionnées pour donner une nouvelle matrice $[c_{ij}] = C = A + B$ définie comme suit :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour tout } i, j \text{ (addition coefficient par coefficient).}$$

Si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}$, la nouvelle matrice cA est définie naturellement comme ceci :

$$\textit{pour tout } i, j \textit{ le coefficient } (i, j) \textit{ de } cA \textit{ est } ca_{ij}.$$

Quelques propriétés (faciles) :

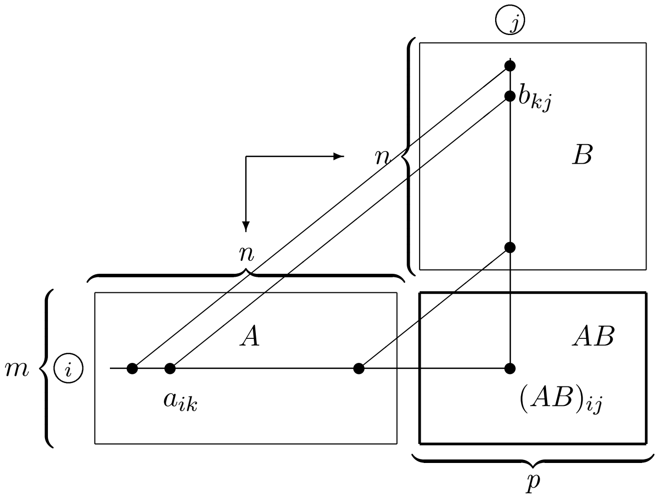
. $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$ (écrit $A + B + C$ sans ambiguïté)
. Si 0 est la matrice nulle (i.e. des coefficients 0 partout),
  $A + 0 = A$,
  $A + (-A) = 0$.
. $c(A + B) = cA + cB$; $(c + d)A = cA + dA$; $c(dA) = (cd)A$.
. $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(cA)^T = cA^T$; $(A^T)^T = A$.
. $(A + B)^* = A^* + B^*$; $(cA)^* = \bar{c}A^*$; $(A^*)^* = A$.
(attention)

I.6. Multiplication de matrices.

Non, ce n'est pas en multipliant les coefficients terme à terme... too bad ! Mais ça n'est pas difficile pour autant. Le produit $C = AB$ (dans cet ordre) de $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $B = [b_{kl}] \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ n'est défini que si $r = n$, c'est-à-dire : **le nombre de colonnes de A = le nombre de lignes B**, auquel cas, $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ a pour coefficients :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}.$$

Pour s'en souvenir, rien de plus simple, **adopter le schéma de calcul suivant** :



l'important est le n commun, peu importe m et p ...

Propriétés (lorsque les multiplications en jeu sont possibles)**:**

. $(AB)C = A(BC)$ (on écrira ABC sans ambiguïté).
. $A(B+C) = AB + AC$.
. $(A+B)C = AC + BC$.
. $(cA)B = A(cB) = cAB$.
. Si 0 est la matrice nulle, $0A = A0 = 0$.
. Si I_n est la matrice identité, $I_n A = A I_n = A$.
. $(AB)^T = B^T A^T$. (**attention à l'interversion de l'ordre !**)
. Si A et B sont diagonales, il en est de même AB.
. Si A et B sont triangulaires inférieures (resp.supérieures), la matrice AB est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Exemples particuliers :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{\textit{matrice unicolonne } (\in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}))}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}y_i & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}y_i & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{in}y_i \end{bmatrix}}_{\textit{matrice uniligne } (\in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}))}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ax^2 + by^2 + 2cxy \end{bmatrix}}_{\textit{matrice scalaire}}$$ (Attention, c'est bien 2c !)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}}_{\textit{matrice scalaire}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix}}_{\textit{matrice carrée } (n,n) \textit{ symétrique}}$$

<u>**Mises en garde !**</u>

$AB \neq BA$ en général.
$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$, ni même $BA = 0$.
$AB = AC$ n'implique pas $B = C$, même si $A \neq 0$.

I.7. Trace d'une matrice carrée.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace** de A la somme des éléments diagonaux de A,

$$A = [a_{ij}],\ trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Propriétés :

. $tr(AB) = trA + trB$; $tr(cA) = ctrA$; $tr(A^T) = trA$.
. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, de sorte qu'on peut effectuer les deux produits AB et BA ; ainsi $AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (elles peuvent donc être de tailles très différentes). Alors

$$\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$$

Ceci est un résultat très utile ... Attention, il est faux de dire que $tr(AB) = (trA)(trB)$.

Exemple:

. *$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$ (utiliser deux fois le résultat précédent)... mais on ne peut pas mettre A, B et C dans n'importe quel ordre.*
. *Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $tr(\underbrace{XX^T}_{(n,n)}) = tr(\underbrace{X^TX}_{(1,1)}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (Revoir pour ce cas extrême les exemples de la page 8).*

I.8. Matrices inversibles.

Une matrice (carrée) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible**, ou **régulière**, ou encore **non singulière** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

En fait, il suffit d'avoir $AB = I_n \ldots$ sans se préoccuper de BA (cela se démontre à l'aide des déterminants).

Une telle matrice B est (unique et) appelée **l'inverse de A** ; elle est notée A^{-1}.

Lorsque A n'est pas inversible, on dit qu'elle est **singulière**.

Propriétés et règles de calcul :

- Si A est inversible, il en est de même de A^T et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (de sorte que la notation A^{-T} est acceptée pour désigner $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$).
- Si A et B sont inversibles (et de même taille), il en est de même de AB et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}} \text{ (\textbf{attention à l'interversion de l'ordre !})}$$

- Si A est diagonale (resp. triangulaire inférieure, triangulaire supérieure) et inversible, alors A^{-1} est diagonale (resp. triangulaire inférieure, triangulaire supérieure).

  Exemple:

  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$ *est inversible dès lors que tous les a_{ii} sont différents de 0, auquel cas*

  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ *; ce qui est marqué dans les 2 matrices ne peut se comparer directement.*

- Si A est inversible et $c \neq 0$, cA est inversible et $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- Si A est inversible, $(A^{-1})^{-1} = A$ (On retombe sur ses pieds comme pour l'opération de transposition).
- **Attention !** Si A et B sont inversibles, on ne sait rien dire de $A + B \ldots$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p un entier positif, alors la notation A^p signifie $\underbrace{AA\ldots A}_{p\ fois}$. Si $p = 0$, on convient de ceci : $A^0 = I_n$.

Avec la règle d'inversion rappelée plus haut, on obtient : si A est inversible, A^p l'est aussi et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (de sorte que la notation A^{-p} est acceptée pour désigner $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$).

Ainsi A^p est bien définie sans ambiguïté pour p entier relatif ($p \in \mathbb{Z}$).

I.9. Explication de la multiplication matricielle à l'aide des transformations linéaires.

Le produit AB de deux matrices peut sembler bizarre ... d'autant que le terme (i, j) de AB n'est pas le produit des termes (i, j) de A et de B. D'où cette manière de faire AB (cf. partie I.6) vient-elle ?

Considérons les 2 variables x_1 et x_2 sur lesquelles on fait une transformation linéaire :

$$(1) \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad [(x_1, x_2) \text{ ont donné } (y_1, y_2) \text{ via } (1)]$$

Supposons que x_1 et x_2 étaient elles-mêmes le résultat d'une transformation linéaire à partir de variables initiales w_1 et w_2 :

$$(2) \begin{cases} x_1 = b_{11}w_1 + b_{12}w_2, \\ x_2 = b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{cases} \quad [(w_1, w_2) \text{ ont donné } (x_1, x_2) \text{ via } (2)]$$

Question : comment obtenir à présent y_1 et y_2 à partir de w_1 et w_2 ? Un simple calcul à partir de (1) et (2) conduit à :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2), \\ y_2 = a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \end{cases}$$

soit encore :

$$(3) \begin{cases} y_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2, \\ y_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{cases}$$

ou

$$(4)\begin{cases} c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, & c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}, \\ c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, & c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{cases}$$

En reformulant (1) et (2) sous la forme matricielle :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=Ax=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=Bw=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

on reconnaît en (3) et (4) :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=Cw=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

où $C = AB$ précisément.

I.10. Définitions complémentaires.

- A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^{-1}AP$$

  Comme le suggère l'appellation, deux matrices semblables A et B ont un certain nombre de propriétés communes ; par exemple : $trB = trA$ (mais avec des matrices semblables, on est loin des matrices égales !)

  Exemple:

  . *A est semblable à elle même.*
  . *Si A et B sont semblables, B et A le sont aussi.*
  . *Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont aussi semblables.*

- A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **congruentes** s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^T AP$$

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si $A^T = A^{-1}$

  (attention)

  Manières équivalentes de le voir :
  . $AA^T = I_n$
  ou bien
  . les colonnes de A (ou les lignes de A) sont des vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux (on dit qu'elles forment un système orthonormal).

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **unitaire** si $A^* = A^{-1}$.

  (attention)

  De même que "hermitienne" était le pendant complexe de "symétrique" (cf. p.7), "unitaire" est le pendant complexe de "orthogonale".

Note : Si P est orthogonale et que $B = P^{-1}AP(= P^T AP)$, A et B sont semblables **et** congruentes (le pied !).

I.11. Exercices.

Exercice 1:

On sait que $0A = A0 = 0$, où 0 désigne la matrice nulle. Trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que le produit soit la matrice nulle.

Rép. 1 : *Soit par exemple* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *; on vérifie que* $AB = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 2:

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

1°) Touver un vecteur colonne non nul $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *tel que* $A.\vec{u} = 3\,\vec{u}$.

2°) Déterminer tous les vecteurs vérifiant cette relation.

Rép. 2 :

1°) Tout vecteur $\vec{u}$ *non nul pour lequel* $2x - 3y = 0$ *;* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est un exemple.*

2°) Les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix}$, *où a est un paramètre réel quelconque.*

Exercice 3:

Montrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. *sont inverses l'une de l'autre.*

Rép. 3 : *On vérifie que* $AB = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4:

Déterminer les inverses, s'ils existent, des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Rép. 4 :

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$, *$C$ n'est pas inversible.*

Exercice 5:

Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale, telle que A^2 soit diagonale.

Rép. 5 : *Par exemple,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, *de sorte que* $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Exercice 6:

Trouver une matrice triangulaire supérieure $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$

Rép. 6 : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 7:
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures. Montrer que AB est encore une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$,...,$a_{nn}b_{nn}$ ($A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$).

Exercice 8:
Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale dont la première ligne soit un multiple positif de (3,4).

Rép. 8 : $A = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ *ou bien* $A = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$

Exercice 9:
Vérifier que la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante est orthogonale.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Exercice 10:
Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivante est unitaire :

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 - i2/3 & i2/3 \\ -i2/3 & -1/3 - i2/3 \end{bmatrix}$$

Exercice 11:
Calculer le produit AB par la technique du produit par blocs, avec :

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad et \quad B = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rép. 11 : $A = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & G \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix}$ *(attention, les 0 ne sont pas des blocs de même taille).*

Alors $AB = \begin{bmatrix} ER & ES + FT \\ 0 & GT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exercice 12:
Soit M diagonale par blocs, $M = diag(A, B, C)$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calculer M^2 en se servant de la technique où "on élève chaque bloc au carré".

Rép. 12 : $M^2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{25} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 16 & 24 \\ 40 & 64 \end{matrix}} \end{bmatrix}$

Exercice 13:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *; montrer que :*

i) $A + A^T$ *est symétrique ;*

ii) $A - A^T$ *est antisymétrique ;*

iii) $A = B + C$*, où* B *est symétrique et* C *antisymétrique.*

Exercice 14:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *; montrer que :*

i) $A + A^*$ *est hermitienne ;*

ii) $A - A^*$ *est antihermitienne ;*

iii) $A = B + C$*, où* B *est hermitienne et* C *antihermitienne.*

Exercice 15:

On dit que les matrices A *et* B *commutent lorsque* $AB = BA$.

Les matrices suivantes commutent-elles ?

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 16:

Calculer $(A + B)^2$ *et* $A^2 + 2AB + B^2$ *lorsque*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sous quelle condition (portant sur A *et* B*) a-t-on* $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *?*

Exercice 17:

Vérifier que la matrice $\alpha I_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ *(où* α *est un scalaire quelconque) commute avec toutes les matrices (2,2).*

Montrer qu'il n'y a pas d'autres matrices qui jouissent de cette propriété.

Ind. : *En prenant* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*, on essaie de vérifier si* $AB = BA$ *pour les choix particuliers suivants de* B*,* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

II. Systèmes Linéaires

II.1. Définition.

Un **système linéaire** de **m** équations à **n** inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un ensemble d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

où les a_{ij} et b_j sont des scalaires donnés. Si les b_j sont tous nuls, on parle d'un système **homogène**, et $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ est automatiquement solution.

Forme matricielle de (1) :

$$AX = b, \ ou\ A = [a_{ij}],\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \ et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

II.2. Procédé d'élimination de GAUSS.

Nous le présentons sur plusieurs exemples différents.

Exemple 1:

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{r} \textit{pivot 1} \\ (\textit{1}x_1) \end{array} \longrightarrow & \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 10x_2 & + & 25x_3 & = & 90 \\ 20x_1 & + & 10x_2 & & & = & 80 \end{array} \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{Matrice } [\ A \,\vdots\, b\ ] \\ \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array}\right] \end{array} \tag{3}$$

<u>$1^{ère}$ *étape :*</u> *Elimination de x_1.*

A l'aide de la $1^{ère}$ équation et du terme pivot x_1, on va éliminer x_1 dans les autres équations. Pour cela, on ajoute L_1 ($1^{ère}$ ligne) à la $2^{ème}$, on ajoute $(-20L_1)$ à la $4^{ème}$, on ne s'occupe pas de la $3^{ème}$ puisque x_1 n'y figure pas. Cela conduit à :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 10x_2 & + & 25x_3 & = & 90 \\ & & 30x_2 & - & 20x_3 & = & 80 \end{array}$$

<u>$2^{ème}$ *étape :*</u> *Elimination de x_2.*

La $1^{ère}$ équation, qui a servi d'équation pivot, reste telle quelle. La $2^{ème}$ ne contenant pas x_2, on change l'ordre des équations de manière à avoir un pivot non nul. On obtient ainsi les équations réordonnées :

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \textit{pivot 10 } (10x_2) & \longrightarrow & & & \boxed{10x_2} & + & 25x_3 & = & 90 \\ \textit{à éliminer} & \longrightarrow & & & \boxed{30x_2} & - & 20x_3 & = & 80 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (4)$$

A l'aide de la $2^{\text{ème}}$ équation et du terme pivot $10x_2$, éliminer x_2 dans les autres équations (1 seule à traiter ici) ; pour cela : on ajoute $(-3L_2)$ à la $3^{\text{ème}}$ équation. Cela donne :

$$\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 = & 0 \\ 10x_2 + 25x_3 = & 90 \\ -95x_3 = & -190 \\ 0 = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (5)$$

(Attention à ne pas oublier de transformer les scalaires b_j de droite dans ces opérations successives !)

$3^{\text{ème}}$ *étape : Résolution en remontant dans les équations.*

De la $3^{\text{ème}}$ équation de (5) on tire directement $x_3 = 2$; avec cette information, de la $2^{\text{ème}}$ équation on tire $x_2 = 4$; connaissant x_3 et x_2, de la $1^{\text{ère}}$ équation on tire $x_1 = 2$.

Résumé : (3) était un système de 4 équations à 3 inconnues ; on en a tiré une solution unique $(x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2)$

Cet exemple illustre **les diverses opérations dans une élimination de GAUSS :**
- Multiplier une équation par un terme non nul
- Ajouter (ou soustraire) le multiple d'une équation à une autre
- Echanger l'ordre de deux équations.

Les opérations correspondantes sur la "matrice augmentée" $[A\vdots b]$ sont : multiplier une ligne par un terme non nul ; ajouter (ou soustraire) le multiple d'une ligne à une autre ; échanger deux lignes.

Définitions:
Le système linéaire (1) est dit **sur-déterminé** s'il y a plus d'équations que d'inconnues ($m > n$), **déterminé** si $m = n$, et **sous-déterminé** s'il y a moins d'équations que d'inconnues ($m < n$).

Le système linéaire (1) est dit **compatible** (ou consistant) s'il a une solution au moins, **incompatible** (ou inconsistant) s'il n'a aucune solution.

Exemple 2 (Système linéaire à une infinité de solutions)**:**

Matrice $[\ A \mid b\ ]$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \textit{pivot} & \longrightarrow & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ \textit{à éliminer} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} 0,6x_1 \\ 1,2x_1 \end{array}} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} 1,5x_2 \\ 0,3x_2 \end{array} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} 1,5x_3 \\ 0,3x_3 \end{array} & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & \begin{array}{c} 5,4x_4 \\ 2,4x_4 \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 2,7 \\ 2,1 \end{array} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0,6 & 1,5 & 1,5 & -5,4 & 2,7 \\ 1,2 & -0,3 & -0,3 & 2,4 & 2,1 \end{array}\right] (6)$$

$1^{\text{ère}}$ *étape : Elimination de x_1 dans la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ équation.*

On ajoute $(-0,2L_1)$ à la $2^{\text{ème}}$ équation, on ajoute $(-0,4L_1)$ à la $3^{\text{ème}}$. Cela conduit à :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ \textit{pivot} & \longrightarrow & & & \boxed{1,1x_2} & + & 1,1x_3 & - & 4,4x_4 & = & 1,1 \\ \textit{à éliminer} & \longrightarrow & & & \boxed{-1,1x_2} & - & 1,1x_3 & + & 4,4x_4 & = & -1,1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1,1 & 1,1 & -4,4 & 1,1 \\ 0 & -1,1 & -1,1 & 4,4 & -1,1 \end{array}\right]$$

2ème étape : Elimination de x_2 dans la 3ème équation.

Pour cela : ajouter L_2 à L_3 (3ème équation) ; cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ & & 1,1x_2 & + & 1,1x_3 & - & 4,4x_4 & = & 1,1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1,1 & 1,1 & -4,4 & 1,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3ème étape : Résolution en remontant dans les équations.

De la 2ème équation on tire $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$; de ceci et de la 1ère équation, on tire $x_1 = 2 - x_4$. Les valeurs de x_3 et x_4 ***peuvent-être choisies comme on veut ;*** *une fois ce choix fait, on a x_1 et x_2. Les solutions du système proposé sont donc : $(2 - x_4, 1 - x_3 - 4x_4, x_3, x_4)$ x_3 et x_4 quelconques.*

On a traité ici un système sous-déterminé : (6) comportait 3 équations à 4 inconnues.

Exemple 3 (Système linéaire à une et une seule solution)**:**

$$\begin{array}{r} \textit{pivot} \longrightarrow \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow \end{array} \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ \boxed{3x_1} & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ \boxed{-x_1} & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{Matrice } [\, A \,|\, b \,] \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \end{array} \tag{7}$$

1ère étape : Elimination de x_1 dans la 2ème et 3ème équation.

ajouter $(3L_1)$ à L_2, faire $L_3 - L_1$. Cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & \textit{pivot} \longrightarrow & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 12 \\ & \textit{à éliminer} \longrightarrow & \boxed{2x_2} & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

2ème étape : Elimination de x_2 dans la 3ème équation.

Pour cela : ajouter $-L_2$ à L_3 ; cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 12 \\ & & & & -5x_3 & = & -10 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

3ème étape : Résolution en remontant dans les équations.

De la dernière on tire $x_3 = 2$, puis de la 2ème $x_2 = -1$, enfin de la 1ère $x_1 = 1$.

On a traité dans cet exemple un système déterminé : ((7) comportait 3 équations à 3 inconnues). En définitive, ce système linéaire (7) possède une seule solution $(x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2)$.

Exemple 4 (Système linéaire sans solution)**:**

$$\begin{array}{rcrcrcl} \textit{pivot} \longrightarrow \ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} 2x_1 \\ 6x_1 \end{array}} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{r} x_2 \\ 2x_2 \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{r} x_3 \\ 4x_3 \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 6 \end{array} \end{array} \qquad \textit{Matrice } [\ A \mid b\ ] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \tag{8}$$

<u>$1^{ère}$ *étape :*</u> *Elimination de x_1 dans la $2^{ème}$ et $3^{ème}$ équation.*
Pour cela, on ajoute $-\frac{2}{3}L_1$ à L_2, on ajoute $-2L_1$ à L_3 ; cela conduit à :

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & \textit{pivot} \longrightarrow & -\frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & -2 \\ & \textit{à éliminer} \longrightarrow & \boxed{-2x_2} & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

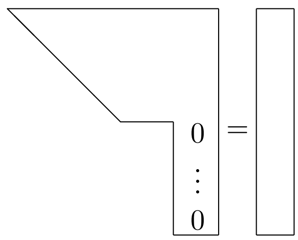
<u>$2^{ème}$ *étape :*</u> *Elimination de x_2 dans la $3^{ème}$ équation.*
Pour cela, on ajoute $-6L_2$ à L_3 ; cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & -\frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 12 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

<u>$3^{ème}$ *étape :*</u> *Fin de la résolution.*
En raison de la $3^{ème}$ équation qui est impossible, le système (8) traité (3 équations, 3 inconnues) n'a pas de solution.

A l'aide des opérations élémentaires du procédé d'élimination de Gauss, on peut toujours arriver à mettre un système linéaire sous une **forme dite échelonnée**, c'est-à-dire comme ceci :

$$\begin{array}{rcrcccrcl} \underset{\neq 0}{a_{11}}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots\dots\dots\dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \underset{\neq 0}{c_{22}}x_2 & + & \dots\dots\dots\dots & + & c_{2n}x_n & = & b_2^* \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & \underset{\neq 0}{k_{rr}}x_r & + & k_{rn}x_n & = & \hat{b}_r \\ & & & & & & 0 & = & \hat{b}_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & 0 & = & \hat{b}_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \updownarrow r \ (\text{lignes } 1 \text{ à } r) \\ \updownarrow m \geq r \end{array} \tag{9}$$

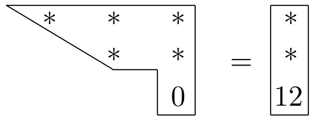


avec $a_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\dots$, $k_{rr} \neq 0$.

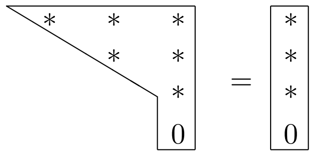
En clair : les lignes de A commencent par un nombre strictement croissant de zéros à mesure que l'indice des lignes augmente.

Il y a 3 cas de figure concernant le schéma général(9) :

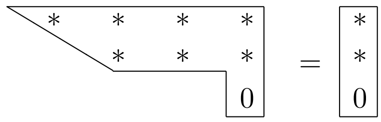
- Si $r < m$ et que l'un des $\widehat{b}_j$, $r+1 \leq j \leq m$, n'est pas nul : le système est incompatible, (9) n'a aucune solution. C'était le cas dans l'exemple 4, avec $r = 2 < m = 3$ et $\widehat{b}_{r+1} = \widehat{b}_3 = 12$



- Si $r = n$ et si les $\widehat{b}_{r+1}, \ldots, \widehat{b}_m$ sont nuls (s'ils sont présents) : le système a alors une et une seule solution. Il suffit de remonter à partir de la $r = n^{ème}$ équation de (9). C'était le cas dans l'exemple 1, avec $r = n = 3$ et $m = 4$



- Si $r < n$ et si les $\widehat{b}_{r+1}, \ldots, \widehat{b}_m$ sont nuls (s'ils sont présents) : le système a alors une infinité de solutions. On choisit en effet $x_{r+1}, \ldots, x_n$ comme on veut ; ensuite la $(r-1)^{ème}$ équation conduit à x_{r-1} en fonction de $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$; puis on continue en remontant dans les équations. C'était le cas dans l'exemple 2 avec $r = 2$, $n = 4$ et $m = 3$.



II.3. Rang d'une matrice.

Définitions:
Le **rang** d'une matrice $A = [a_{ij}]$ est le nombre maximal de vecteurs lignes de A qui sont linéairement indépendants. On note **rgA** cet entier.

Noter que rgA n'est nul que si A est la matrice nulle.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \tag{10}$$

est de rang 2 car :
- Les 3 vecteurs lignes sont linéairement dépendants,

$$6L_1 - \frac{1}{2}L_2 - L_3 = 0;$$

- Les 2 premiers vecteurs lignes sont linéairement indépendants (ils ne sont pas colinéaires).

Propriétés (essentielle)**:**
Le rang de A est aussi le nombre maximal de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants. Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{rg(A^T) = rgA}}$$

Exemple:
Reprenons la matrice A de (10) : puisque son rang est 2, il y a au moins 2 vecteurs colonnes linéairement indépendants ; et chaque fois qu'on prend 3 vecteurs colonnes, on est sûr qu'ils sont linéairement dépendants. Avouez que ça ne saute pas aux yeux !

Retenir que pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $rgA \leq m$ et $rgA \leq n$.

Note: Dans un système linéaire $AX = b$, avec $m \leq n$ (moins d'équations que d'inconnues, ce qui est le cas usuel), il est fréquent qu'on ait $rgA = m$ (i.e. A est de "rang maximal").

Exemple:
Dans une matrice rectangulaire ($m \neq n$), soit les vecteurs lignes soit les vecteurs colonnes sont (toujours) linéairement dépendants.

II.4. Solutions de systèmes linéaires : existence de solutions, unicité.

Théorème:
– Existence. Le système linéaire

$$AX = b, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m \tag{11}$$

a des solutions si et seulement si la matrice A et la matrice "augmentée" $\hat{A} = [A \vdots b] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$ **ont le même rang**.
– Unicité. Le système linéaire (11) a une et une seule solution si et seulement si $\mathbf{rgA} = \mathbf{rg\hat{A}} = \mathbf{n}$.
– Infinité de solutions. Si $rgA = rg\hat{A} < n$, le système linéaire(11) a une infinité de solutions.

Cas particulier :

$$AX = b \text{ avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

(A matrice **carrée**, il y a **autant d'équations que d'inconnues**).
Alors :

$$\left(\begin{array}{c} rgA = n \\ \text{(rang maximal donc)} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\; A \text{ est inversible} \; \right).$$

Dans ce cas, (12) a une et une seule solution, qui est $X = A^{-1}b$.

II.5. Exercices.

Exercice 1:
En utilisant le procédé d'élimination de Gauss, transformer le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & 6 \\ 2x & - & 4y & - & 3z & = & 8 \\ -3x & + & 6y & + & 8z & = & -5 \end{array} \right. , \ (AX = b), \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

en un système équivalent de la forme $TX = c$, où T est une matrice triangulaire supérieure.
Résoudre ($\mathcal{S}$).

Rép. 1 :

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & 6 \\ & & 2y & + & z & = & -4 \\ & & & & 7z & = & 14 \end{array} \right\} , \ T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Solution du système triangulaire équivalent, et donc du système initial ($\mathcal{S}$) : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2:
Mettre les systèmes linéaires suivants sous forme échelonnée :

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = 1 \end{array}\right. , \quad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = 3 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = 5 \end{array}\right.$$

Rép. 2 :

$$(\mathcal{S}_1)\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad (\mathcal{S}_2)\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Exercice 3:
Déterminer si chacun des systèmes linéaires homogènes suivants a une solution non nulle :

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = 0 \end{array}\right. , \quad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & + & 4y & - & z & = 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = 0 \end{array}\right. ,$$

$$(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 7x_4 & = 0 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Rép. 3 : *$(\mathcal{S}_1)$ a autant d'équations que d'inconnues. Mise sous forme échelonnée :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 0 \\ & - & 5y & + & 3z & = 0 \end{array}\right.$$

Une solution non nulle particulière est $\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{pmatrix}$ *(z variable libre).*

Mise sous forme échelonnée de $(\mathcal{S}_2)$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 0 \\ & & 2y & + & z & = 0 \\ & & & & 11z & = 0 \end{array}\right.$$

Le système n'a que la solution nulle $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$.

Le système $(\mathcal{S}_3)$ doit posséder une solution non nulle, puisqu'il y a quatre inconnues pour seulement trois équations ; il n'est pas besoin ici de mettre sous forme échelon pour parvenir à cette conclusion.

Exercice 4:
On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & ay & + & 5z & = & 10 \\ 2x & + & 7y & + & az & = & b \end{array}\right. , \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

1°) Mettre $(\mathcal{S})$ sous forme échelonnée.
2°) Pour quelles valeurs de a le système $(\mathcal{S})$ a-t-il une et une seule solution ?
3°) Pour quelles valeurs du couple (a,b) le système $(\mathcal{S})$ a-t-il plus d'une solution ?

Rép. 4 :

1°)

$$(\mathcal{S}')\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & ay & + & 5z & = & 10 \\ & & & & (a^2-2a-15)z & = & ab-6a-30 \end{array}\right.$$

2°) Le système a une et une seule solution si, et seulement si, le coefficient de z dans la dernière équation de $(\mathcal{S}')$ *est* $\neq 0$ *; c'est-à-dire lorsque* $a \neq 5$ *et* $a \neq -3$.

3°) Le système a plus d'une solution (une infinité en fait) si le coefficient de z et le second membre sont nuls ; cela donne deux possibilités : (a=5, b=12) et (a=-3, b=4).

III. Déterminants

A toute matrice **carrée** $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, on associe un scalaire particulier, appelé **déterminant de A**. Cet objet s'avère être un outil indispensable à l'étude des propriétés des matrices carrées.

Le déterminant de A est noté $détA$ ou $|A|$ (comme une valeur absolue ou un module). Cette deuxième notation peut être utilisée dans les calculs intermédiaires pour alléger les notations ; dans les autres cas elle est génératrice de confusion, la première notation est préférable.

III.1. Déterminants d'ordre 1 et 2.

Si $A = [a]$, $détA = a$; si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $détA = ad - bc$ $\quad \oplus \quad \ominus$

Exemple:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; $détA = 14,\ dét(-A) = 14$ *aussi.*

III.2. Déterminants d'ordre 3.

. Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Son déterminant est défini comme suit (c'est une des définitions équivalentes possibles !) :

$$détA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Il y a dans ce développement 6 produits de 3 éléments de la matrice A, trois sont comptés avec les signe $+$, et les 3 autres avec les signe $-$.

. Autre expression du déterminant d'ordre 3

$$\begin{aligned} détA &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \text{combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2,} \end{aligned}$$

dont le calcul est représenté sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ a_{11}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) & - & a_{12}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) & + & a_{13}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) \end{array} \tag{1}$$

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 55$$

III.3. Déterminants d'ordre quelconque.

III.3.1. Définition à l'aide des permutations.

Une **permutation** σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même ou, de façon équivalente, un réarrangement (ou mélange) de ses termes.

Notation pour désigner σ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad 1 \text{ donne } \sigma(1),\ 2 \text{ donne } \sigma(2),\ \ldots,\ n \text{ donne } \sigma(n).$$

Exemple:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est une permutation de* $\{1, 2, 3\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *est une permutation de* $\{1, 2, 3, 4\}$

L'ensemble de toutes ces permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté S_n, elles sont au nombre de $n\,!$

Si $\sigma \in S_n$, on désigne par α le nombre d'**inversions** dans σ, c'est-à-dire le nombre de paires $(\sigma(i), \sigma(j))$ pour lesquelles $\sigma(i) > \sigma(j)$ alors que $i < j$ (ou encore, α est le nombre d'échanges nécessaires pour repasser de $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n))$ à $(1\ 2\ \ldots\ n)$).

La **signature** de σ est $\epsilon_\sigma = (-1)^\alpha$, c'est-à-dire 1 si α est pair, -1 si α est impair.

Exemple:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1$ *et* $\epsilon_\sigma = -1$.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\epsilon_\sigma = -1$; $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\epsilon_\sigma = 1$.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = 6$ *et* $\epsilon_\sigma = 1$.

Une **transposition** est une permutation particulière : elle échange 2 éléments i et j, en laissant tous les autres à leur place, soit :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, $\alpha = 1$, de sorte que $\epsilon_\tau = -1$.

Si $\epsilon_\sigma = 1$, on dit que la permutation est paire ; si $\epsilon_\sigma = -1$, on dit qu'elle est impaire.

La moitié des permutations de S_n $(n \geq 2)$ sont paires, et celles de l'autre moitié sont impaires.

Voici une première définition de *dét*A pour $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$dét A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

Exemple:
Pour $n = 2$, il y a 2 permutations : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi, avec* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $détA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

III.3.2. Développements suivant une ligne ou une colonne.

Soit $A = [a_{ij}]$. On désigne par M_{ij} la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant de A sa $i^{ème}$ ligne et sa $j^{ème}$ colonne ; le déterminant $|M_{ij}|$ s'appelle le **mineur du coefficient** a_{ij} ; le mineur "signé" $(-1)^{i+j}\,|\mathcal{M}_{ij}| = A_{ij}$ est appelé **le cofacteur de $\mathbf{a_{ij}}$**.

Observer que le coefficient $(-1)^{i+j}$ est ± 1 suivant la parité de la somme $i+j$ des numéros de ligne et colonne de a_{ij}.

Théorème:
détA est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par leurs cofacteurs respectifs :

$$\begin{aligned} détA &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned} \tag{3}$$

Revoir (1) à la page 23 pour un exemple avec $n = 3$.

Ces relations (3), conjuguées avec les opérations élémentaires sur les lignes (ou colonnes), permettent des simplifications substantielles des calculs.

III.4. Propriétés générales des déterminants (important !).

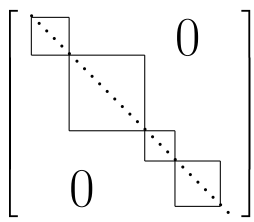
- Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) sont multipliés par une constante c, le déterminant est multiplié par c.
- Echanger 2 colonnes (ou 2 lignes) change le signe du déterminant.
- Ajouter à une colonne le multiple d'une autre colonne ne change pas la valeur du déterminant (idem pour les lignes).
- Si 2 colonnes (ou 2 lignes) sont les mêmes, la déterminant est nul.

Exemple:
$dét(cA) = c^n détA$ (attention ! c^n et non c ...)

III.5. Règles importantes.

. Si A est triangulaire, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ — & a_{12} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \text{———} & \ddots & \\ \text{————} & & \ddots \\ \text{——————} & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $détA = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Un cas particulier est celui des matrices diagonales : *si* $A = diag(c_1, \ldots, c_n)$, $détA = c_1c_2\ldots c_n$. Tout aussi utile est le cas des matrices diagonales par blocs (ou encore triangulaires inférieures ou supérieures par blocs) :

si $A =$  , $détA =$ produit des déterminants par blocs diagonaux
(lesquels sont des matrices carrées de tailles diverses)

Pour les calculs, on a donc intérêt à transformer A, à l'aide d'opérations sur les lignes et colonnes, de manière à la rendre la plus "creuse" possible, c'est-à-dire avec le plus de zéros possibles comme éléments de A.

Exemple:
Calcul du déterminant d'une matrice $(4, 4)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \textit{ligne 2 - 2}\times\textit{(ligne 1)} \\ \\ \textit{ligne 4 + 1,5}\times\textit{(ligne 1)} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2{,}4 & 3{,}8 \\ 0 & 0 & -11{,}4 & 29{,}2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \textit{ligne 3 -0,4}\times\textit{(ligne 2)} \\ \textit{ligne 4 - 1,6}\times\textit{(ligne 2)} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2{,}4 & 3{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 47{,}25 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \textit{ligne 4 + 4,75}\times\textit{(ligne 3)} \end{array}$$

Le format auquel on est rendu est triangulaire ; en conséquence, le déterminant en question vaut

$$2 \times 5 \times 2,4 \times 47,25 = 1134$$

. $dét(A^T) = détA$

. $\boxed{dét(AB) = dét(BA) = détA.détB}$ (à la différence du calcul sur les traces !)

Ainsi, si A est inversible, $dét(A^{-1}) = \frac{1}{détA}$.

Mais il n'y a pas de règle (simple) concernant $dét(A + B)$!

. Les 3 énoncés suivants (concernant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont équivalents :
(i) A est inversible ;
(ii) le système linéaire $AX = 0$ n'a que la solution nulle $X = 0$;
(iii) $détA \neq 0$.

. Le rang de A en termes de déterminants.

Le **rang** de A (=le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A qui sont linéairement indépendants) peut être déterminé par calculs de déterminants de sous-matrices de A.

Théorème:
La matrice A, non nulle, est de rang r si et seulement si :
- **Il existe une** sous-matrice (carrée) de A, de taille (r, r), dont le déterminant n'est pas nul ;
- **Toutes** les sous-matrices (carrée) de A, de taille plus grande que (r, r), ont un déterminant qui est nul.

III.6. Inversion d'une matrice.

On appelle **comatrice** de A, ou **matrice des cofacteurs** de A, la matrice $cofA$ dont le terme (i, j) est le cofacteur du terme a_{ij} de A :

$$cofA = [A_{ij}] \ (A_{ij} \ = \ cofacteur \ de \ a_{ij}) \tag{4}$$

$cofA$ est de même format que A.

Propriété (générale) fondamentale :

$$A(cofA)^T = (cofA)^T A = (detA)I_n$$

Lorsque A est inversible, on a :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{détA}(cofA)^T} \tag{5}$$

(attention à ne pas oublier cette opération de transposition).

Exemple:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, *Alors :* $détA = -46$ *et* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$.

Exemple:

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *avec* $détA = ad - bc \neq 0$. *Alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{(suffisamment simple pour être retenu par coeur).}$$

- $A = \begin{bmatrix} \boxed{B} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{bmatrix}$ *avec B et C inversibles (pas de même taille nécessairement).*

  Alors

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{B^{-1}} & 0 \\ 0 & \boxed{C^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Résolution de systèmes linéaires à l'aide de déterminants, autant d'équations linéaires que d'inconnues (systèmes dits de CRAMER).

Théorème:
Le système linéaire (ou d'équations linéaires) $AX = b$, détaillée en

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. \qquad A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

pour lequel $D = détA \neq 0$, **a exactement une solution**, qui est donnée par

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \dots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \text{ (règle de Cramer)} \tag{6}$$

où D_k est le déterminant d'une matrice modifiée de A en remplaçant la $k^{ème}$ colonne par le vecteur colonne b.

Exemple:

Résoudre par cette méthode (qui n'est pas la meilleure ici!) le système :

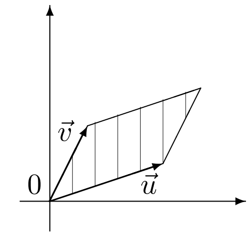
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Réponses : $D = 5, D_x = 20, D_y = -10, D_z = 15,$ *d'ou* $x = 4,\ y = -2,\ z = 3.$

III.8. Déterminants et volumes.

La notion de déterminant est intimement liée à la notion **d'aire** (cas où $n = 2$) et de **volume** (cas où $n = 3$).

Dans le plan ($n = 2, 2D$) ou dans l'espace ($n = 3, 3D$) repéré par un repère orthonormé $(0;\ \vec{i},\ \vec{j})$ ou $(0;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on va considérer les objets suivants :

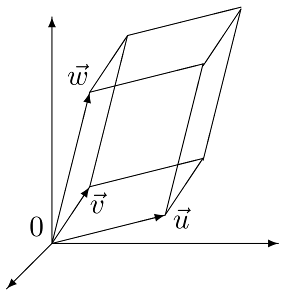


$P = \{\ x\vec{u} + y\vec{v} \mid 0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1\ \}$ est le parallélogramme le côté $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si $A = [\vec{u}\ \vec{v}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (matrice de colonnes $\vec{u}$, $\vec{v}$), alors :

$$\boxed{Aire(P) = |détA|} \text{ (ne pas oublier la valeur absolue!)} \qquad (7)$$

On comprend que $Aire(P) = 0$ lorsque le parallélogramme P est "aplati", i.e. lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou linéairement dépendants).



$P = \{\ x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1\ \}$ est le parallélépipède de côté $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Si $A = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors :

$$\boxed{vol(P) = |détA|} \qquad (8)$$

Si, par exemple, $\vec{w}$ est dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants), le parallélépipède est "aplati" et son volume est nul.

III.9. Exercices.

Exercice 1:

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Calculer détA, la comatrice cofA de A, A^{-1} *à l'aide de détA et cofA.*

Rép. 1 *:* $détA = -2$ *;*

$$cofA = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{détA}(cofA)^T = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2:

Calculer le volume du parallélépipède S de $\mathbb{R}^3$ construit sur les vecteurs suivants :

$$(a)\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix},\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

$$(b)\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$$

Rép. 2 :
(a) Vol S=7,
(b) Vol S=0.

Exercice 3:
Calculer le déterminant de la matrice triangulaire inférieure par blocs suivante :

$$A=\left[\begin{array}{cc|c|cc} 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 9 & 2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 5 & 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Rép. 3 : $dét A = dét\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix} \times dét\,[2] \times dét\begin{bmatrix}6 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix} = 7\times 2\times 3 = 42$

Exercice 4:
Soit P une matrice inversible ; montrer que $détP^{-1} = \frac{1}{détP}$.

Rép. 4 : *Puisque $P^{-1}P = I_n$, et que $dét(P^{-1}P) = dét(P^{-1})détP = détI_n = 1$, on a le résultat annoncé.*

Exercice 5:
Soit A et B deux matrices semblables ; montrer que $détB = détA$.

Rép. 5 : *A et B étant semblables, il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. En conséquence,*

$$détB = dét(P^{-1}).détA.détP = détA.$$

Exercice 6:
Soit $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.
Déterminer la matrice $cofA$. Que vaut $cof(cofA)$? Quand-a-t-on $A = cofA$?

Rép. 6 : $cofA = \begin{bmatrix}d & -c\\ -b & a\end{bmatrix}$ *;* $cof(cofA) = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = A$. *On a $A = cofA$ lorsque $a = d$ et $b = -c$.*

Exercice 7:
Soit A une matrice triangulaire, $A = [a_{ij}]$.
(a) Montrer que A est inversible si et seulement si tous les éléments diagonaux a_{ii} sont non nuls.
(b) Montrer que si A est inversible, les éléments diagonaux de A^{-1} sont les inverses $\frac{1}{a_{ii}}$ des éléments diagonaux de A.

Exercice 8:
Soit $A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$.

Calculer A^2.
En déduire que dét$A = \pm 27$.

Rép. 8 : *$A^2 = 9I_3$. D'où dét$(A^2) = 9^3$.*
Comme dét$(A^2) = (\text{dét}A)^2$, on en déduit que dét$A = \pm 3^3 = \pm 27$.

Exercice 9:
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix}$, *où a, b et c sont des scalaires .*
Montrer que dét$A = 0$.

Exercice 10:
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11:
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
1°) Calculer A^2, A^3, puis $A^3 - 3A^2 - 2A$.
2°) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3°) Résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ -x - 2y - z = c \end{cases}, \text{ où } a\ b \text{ et } c \text{ sont des scalaires quelconques.}$$

Rép. 11 :
1°) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 1 \\ 25 & 34 & 2 \\ -14 & -19 & -1 \end{bmatrix}$, *de sorte que* $A^3 - 3A^2 - 2A = I_3$.
2°) De $A^3 - 3A^2 - 2A = I_3$, on tire $A(A^2 - 3A - 2I_3) = I_3$, d'où :

$$A^{-1} = A^2 - 3A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.
3°) La solution est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 3b + 4c \\ a - 2b - 3c \\ -a + b + c \end{pmatrix}.$$

A Brief History of Linear Algebra and Matrix Theory

The introduction and development of the **notion of a matrix** and the **subject of linear algebra** followed the development of **determinants**, which arose from the study of coefficients of systems of linear equations. Leibnitz, one of the founders of calculus, used determinants in 1693 and Cramer presented his determinant-based formula for solving systems of linear equations (today known as Cramer's Rule) in 1750. In contrast, the first implicit use of matrices occurred in Lagrange's work on bilinear forms in the late 1700s. Lagrange desired to characterize the maxima and minima of multivariate functions. His method is now known as the method of Lagrange multipliers. In order to do this he first required the first order partial derivatives to be 0 and additionally required that a condition on the matrix of second order partial derivatives hold ; this condition is today called positive or negative definiteness, although Lagrange didn't use matrices explicitly.

Gauss developed Gaussian elimination around 1800 and used it to solve least squares problems in celestial computations and later in computations to measure the earth and its surface (the branch of applied mathematics concerned with measuring or determining the shape of the earth or with locating exactly points on the earth's surface is called geodesy. Even though Gauss' name is associated with this technique for successively eliminating variables from systems of linear equations, Chinese manuscripts from several centuries earlier have been found that explain how to solve a system of three equations in three unknowns by "Gaussian" elimination. For years Gaussian elimination was considered part of the development of geodesy, not mathematics. The first appearance of Gauss-Jordan elimination in print was in a handbook on geodesy written by Wilhelm Jordan. Many people incorrectly assume that the famous mathematician Camille Jordan is the Jordan in "Gauss-Jordan" elimination.

For matrix algebra to fruitfully develop one needed both proper notation and the proper definition of matrix multiplication. Both needs were met at about the same time and in the same place. **In 1848 in England, J.J. Sylvester first introduced the term "matrix"**, which was the Latin word for womb, as a name for an array of numbers. Matrix algebra was nurtured by the work of Arthur Cayley in 1855. Cayley studied compositions of linear transformations and was led to define matrix multiplication so that the matrix of coefficients for the composite transformation ST is the product of the matrix for S times the matrix for T. He went on to study the algebra of these compositions including matrix inverses. The famous Cayley-Hamilton theorem which asserts that a square matrix is a root of its characteristic polynomial was given by Cayley in his 1858 Memoir on the Theory of Matrices. The use of a single letter A to represent a matrix was crucial to the development of matrix algebra. Early in the development the formula det(AB) = det(A)det(B) provided a connection between matrix algebra and determinants. Cayley wrote "There would be many things to say about this theory of matrices which should, it seems to me, precede the theory of determinants."

Mathematicians also attempted to develop of algebra of vectors but there was no natural definition of the product of two vectors that held in arbitrary dimensions. The first vector algebra that involved a noncommutative vector product (that is, **v x w** need not equal **w x v**) was proposed by Hermann Grassmann in his book Ausdehnungslehre (1844). Grassmann's text also introduced the product of a column matrix and a row matrix, which resulted in what is now called a simple or a rank-one matrix. In the late 19th century the American mathematical physicist Willard Gibbs published his famous treatise on vector analysis. In that treatise Gibbs represented general matrices, which he called dyadics, as sums of simple matrices, which Gibbs called dyads. Later the physicist P. A. M. Dirac introduced the term "bra-ket" for what we now call the scalar product of a "bra" (row) vector times a "ket" (column) vector and the term "ket-bra" for the product of a ket times a bra, resulting in what we now call a simple matrix, as above. Our convention of identifying column matrices and vectors was introduced by physicists in the 20th century.

Matrices continued to be closely associated with linear transformations. By 1900 they were just a finite-dimensional subcase of the emerging theory of linear transformations. **The modern definition of a vector space was introduced by Peano in 1888**. Abstract vector spaces whose elements were functions soon followed.

There was renewed interest in matrices, particularly on the numerical analysis of matrices, after World War II with the development of modern digital computers. John von Neumann and Herman Goldstine introduced condition numbers in analyzing round-off errors in 1947. Alan Turing and von Neumann were the 20th century giants in the development of stored-program computers. Turing introduced the LU decomposition of a matrix in 1948. The L is a lower triangular matrix with 1's on the diagonal and the U is an echelon matrix. It is common to use LU decompositions in the solution of a sequence of systems of linear equations, each having the same coefficient matrix. The benefits of the QR decomposition was realized a decade later. The Q is a matrix whose columns are orthonormal vectors and R is a square upper triangular invertible matrix with positive entries on its diagonal. The QR factorization is used in computer algorithms for various computations, such as solving equations and find eigenvalues.

References

S. Athloen and R. McLaughlin, Gauss-Jordan reduction : A brief history, American Mathematical Monthly 94 (1987) 130-142.

A. Tucker, The growing importance of linear algebra in undergraduate mathematics, The College Mathematics Journal, 24 (1993) 3-9.

From M.A. Vitulli, Departement of mathematics, University of Oregon at Eugene (USA).