

De l'importance d'être constant... dans sa largeur *

Terence Bayen[†], Jean-Baptiste Hiriart-Urruty[‡]

Chaque personne qui regarde un disque peut se rendre compte que celui-ci possède la propriété géométrique d'être de largeur constante. La distance entre deux droites parallèles tangentes à celui-ci reste constante et vaut exactement le diamètre du disque. Existe-t-il alors d'autres formes que le disque possédant la dite propriété d'être de largeur constante? Un des premiers éléments de réponse fut donné par Franz Reuleaux¹ au 19^{ème} siècle. On lui doit le célèbre *triangle de Reuleaux* obtenu comme l'intersection de trois disques de même rayon centrés sur les trois sommets d'un triangle équilatéral, chacun passant par les deux autres sommets du triangle. Pour tout couple de droites parallèles situées de part et d'autre du triangle et en contact avec celui-ci, l'une

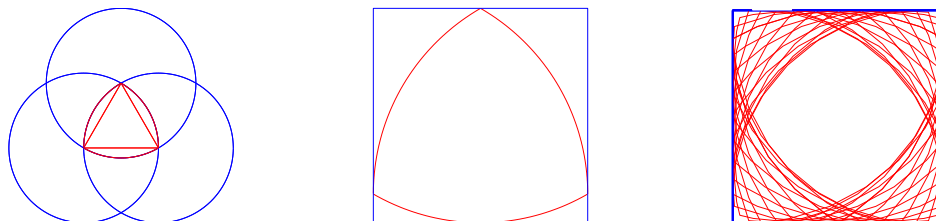


FIGURE 1 – Le triangle de Reuleaux est l'intersection des trois disques centrés sur les trois sommets d'un triangle équilatéral et reliant les deux autres côtés. Il tourne dans un carré en restant en contact à chaque instant avec les quatre côtés de ce dernier. Mais en tournant il ne remplit qu'environ 98,7% du carré (il manque les coins).

de ces deux droites passera par un sommet. Ainsi, la distance entre ces deux droites est bien constante.

Une des propriétés cinématiques de ce triangle curviligne est de pouvoir tourner sans glisser dans un carré de même côté tout en restant à chaque instant en contact avec les quatre côtés de ce dernier. Cette propriété est d'ailleurs très utile dans le domaine industriel : de nombreuses pièces mécaniques ainsi que le moteur Wankel à piston rotatif ont pour forme le triangle de Reuleaux. On ne saurait également oublier les pièces anglaises de 20 et 50 pence en forme d'heptagone de Reuleaux (le triangle équilatéral de base étant remplacé par l'heptagone régulier). Les formes de largeur constante les plus simples à se représenter sont les polygones de Reuleaux (voir Figure 3) et le disque, mais il existe en réalité une grande panoplie de formes qui ont cette propriété. Celles-ci ont fait l'objet d'une attention soutenue de la part des mathématiciens du 19^{ème} siècle comme du 20^{ème} siècle pour leur nombreuses propriétés géométriques remarquables (Minkowski, Lebesgue, Blaschke, Hurwitz, etc.). C'est Euler qui le premier les a baptisées du nom d'*orbiformes*; on emploie également le terme de courbes de largeur constante ou corps de largeur constante (le mot corps désigne ici un ensemble fermé borné convexe² non-vide). Cette famille de courbes recèle des propriétés géométriques qui peuvent paraître étonnantes. Aussi surprenant soit-il, toutes les courbes de largeur constante 1 ont le même périmètre : à savoir π , c'est le Théorème de Barbier³. Le lecteur pourra alors se demander ce qu'il en est de

*A paraître dans DOSSIER N°91 / AVRIL-JUIN 2016 / © POUR LA SCIENCE

[†]Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, Université Montpellier, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier, France. tbayen@math.univ-montp2.fr

[‡]Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 11 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9, France. jbhu@math.univ-toulouse.fr

1. Ingénieur allemand né en 1829 et mort en 1905, Franz Reuleaux est considéré comme le père de la cinématique. Professeur au Polytechnikum de Zürich puis à Berlin, il a donné son nom au célèbre triangle curviligne de Reuleaux.

2. On dit qu'un ensemble C est convexe si pour tout couple de points de C , le segment les joignant est entièrement contenu dans C .

3. Joseph Emile Barbier était un astronome français né en 1839 et mort en 1889.



FIGURE 2 – La forme de largeur constante la plus connue à part le disque est le triangle de Reuleaux que l’on trouve dans des pièces mécaniques. La pièce anglaise de 50 pence est en forme d’heptagone de Reuleaux (le triangle équilatéral de base étant remplacé par l’heptagone régulier). Une pizza originale : la spéciale Reuleaux aux anchois !

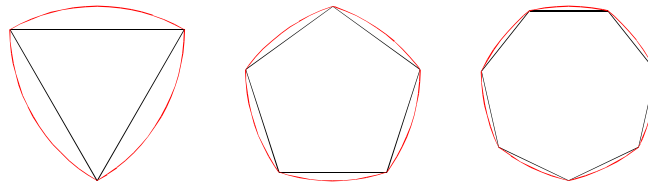


FIGURE 3 – Les polygones de Reuleaux s’obtiennent comme le triangle de Reuleaux à partir d’un polygone régulier ayant un nombre impair de côtés. L’aire de ces polygones curvilignes vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{p}{2} \tan(\frac{\pi}{2p})$ où p est le nombre de côtés (impair). Elle est croissante en fonction du nombre de côtés.

la surface du domaine à l’intérieur de telles courbes. Le résultat suivant, certes intuitif, mais moins évident fut démontré indépendamment par Blaschke et Lebesgue au début du 20^{ème} siècle : parmi tous les corps de largeur constante 1, le disque de rayon $\frac{1}{2}$ possède l’aire maximale $\frac{\pi}{4} \simeq 0.78$ et le triangle de Reuleaux possède l’aire minimale $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.70$ (Théorème de Blaschke-Lebesgue). La différence d’aire entre ces deux objets est de 10% environ (ce qui pourrait donner des idées pour économiser de la matière afin d’usiner des pièces ayant les mêmes propriétés que le disque). Puisque toutes les courbes de largeur constante 1 ont le même périmètre, l’inégalité isopérimétrique⁴ entraîne de façon élémentaire que le disque est bien d’aire maximale. Il y a eu historiquement plusieurs démonstrations du Théorème de Blaschke-Lebesgue par des méthodes géométriques et plus récemment par des outils analytiques (calcul des variations, théorie du contrôle optimal). Ce faisant, les objets de largeur constante posent encore bien des questions. En effet, la notion de largeur pour un corps convexe n’est pas attachée uniquement au cas des formes du plan. Par exemple en dimension 3 on parle de corps *d’épaisseur constante*. De façon surprenante, le problème de minimiser le volume parmi les corps d’épaisseur constante 1 reste un problème ouvert depuis qu’il a été posé par Bonnesen et Fenchel en 1934 ! Les techniques modernes comme celles issues du calcul variationnel ou du contrôle optimal permettent soit de retrouver des résultats déjà démontrés soit d’en améliorer significativement certains autres.

Fonction d’appui et orbiformes.

Comment décrit-on les orbiformes ? Existe-t-il des orbiformes qui ne sont pas formées d’arcs de cercle ? La façon la plus élémentaire de les représenter est d’introduire la fonction d’appui d’un corps convexe, qui va nous permettre d’exprimer la contrainte de largeur constante de façon élémentaire. Rappelons qu’à tout corps convexe C , on peut associer de façon univoque (à translation près) une fonction p appelée *fonction d’appui* et qui permet de le caractériser complètement. Mathématiquement, elle est définie dans une direction u comme la valeur du maximum des produits scalaires $y \cdot u$ lorsque y parcourt tout l’ensemble C . On voit de façon évidente que ce maximum est atteint au point de contact x entre C et la droite d’appui dans la direction u (voir Figure 4). Ainsi, la fonction p conduit à un paramétrage du bord d’un corps convexe C en considérant l’enveloppe de

4. Parmi les courbes fermées du plan de longueur donnée, celle qui entoure le plus grand domaine est le cercle, c’est le fameux problème de la reine Didon à qui l’on doit, selon la légende, la fondation de la ville de Carthage au 9^{ème} siècle avant J.-C.

toutes ses droites d'appui. De façon plus intuitive, la fonction p représente tout simplement la distance entre la droite d'appui à C dans la direction indiquée par l'angle θ et l'origine du repère. Dans le plan elle est notée $p(\theta)$ où θ désigne l'angle que fait le vecteur u , perpendiculaire à la droite d'appui, avec l'axe des abscisses (voir Figure 4). Ce paramétrage peut paraître non standard au premier abord car l'on est certainement plus

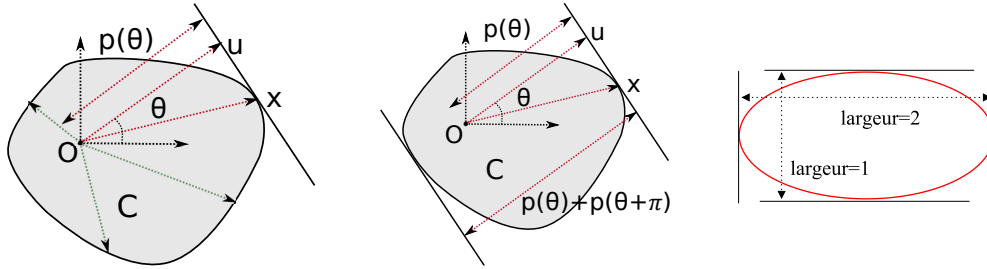


FIGURE 4 – La fonction d'appui au point u se calcule comme le maximum des produits scalaires entre les vecteurs de C (en vert) et le vecteur u . Ce maximum est atteint au point de contact x entre la tangente et C (figure de gauche). La valeur $p(\theta)$ représente la distance entre l'origine O du repère et une droite d'appui à C orientée selon un angle θ ; la largeur de C dans cette direction est la quantité $p(\theta) + p(\theta + \pi)$ (figure du milieu). L'ellipse de grand axe 1 et de petit axe $\frac{1}{2}$ a une largeur comprise entre 1 et 2 (figure de gauche). Un orbiforme de largeur 1 est un corps convexe qui satisfait $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1$ dans toutes les directions indiquées par θ .

habitué à manipuler le paramétrage polaire que l'on apprend en première année d'Université. En fait, les deux paramétrages par fonction d'appui et par rayon polaire sont intimement liés : plus précisément ils sont duaux⁵ l'un de l'autre. En effet, l'inverse de la fonction d'appui coïncide exactement avec le rayon polaire du corps convexe C^* , le dual de C (en analyse convexe le dual ou polaire de C est défini comme l'ensemble des points du plan pour lesquels la fonction d'appui de C est strictement inférieure à 1). Ainsi, le paramétrage par fonction d'appui n'est rien d'autre qu'un paramétrage polaire !

Ce faisant, que peut-on tirer comme propriétés sur p à partir de la géométrie d'un ensemble convexe C ? Pour le disque de rayon $\frac{1}{2}$, on voit que p est constante et est donc très régulière. Toutefois, pour le carré de côtés $(\pm 1, \pm 1)$ on notera qu'elle l'est moins (voir Figure 5). En effet, la zone de tangence du bord du carré dans la direction indiquée par l'angle $\theta = 0$ est le segment $\{1\} \times [-1, 1]$ et n'est pas un singleton ! Le fait qu'une seule direction $\theta = 0$ encode toute une zone d'appui introduit justement une singularité dans la fonction p . En fait, la stricte convexité⁶ de C implique une certaine régularité sur la fonction p que l'on va retrouver dans les orbiformes. Cette élégante propriété se trouve typiquement dans les ouvrages comme *Theory of convex bodies* de Bonnesen et Fenchel (republié en 1987).

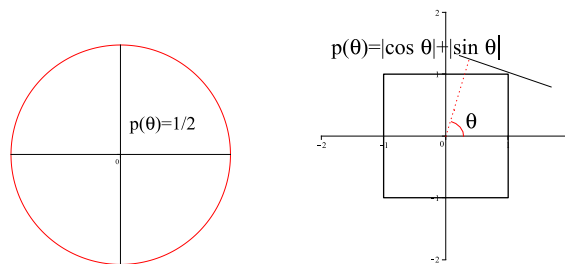


FIGURE 5 – Pour le disque de rayon $\frac{1}{2}$, on a $p(\theta) = \frac{1}{2}$ et pour le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$ on obtient par un calcul trigonométrique et en utilisant la symétrie du carré la formule $p(\theta) = |\cos \theta| + |\sin \theta|$.

Il se trouve que la fonction d'appui est justement l'outil adéquat pour étudier les problèmes géométriques où

5. La dualité est présente dans de nombreuses branches des mathématiques. Dans le cas présent, on peut penser à un cône C et à son dual C^* , ce dernier étant défini comme l'ensemble des vecteurs qui font un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$ avec tous les vecteurs de C .

6. On dit qu'un domaine C est strictement convexe si tout barycentre strict entre deux points se trouve à l'intérieur de C . Les polygones ne sont pas strictement convexes alors qu'un disque ou une ellipse le sont.

intervient la notion de largeur. Puisque $p(\theta)$ mesure exactement la distance entre la droite d'appui à C dans la direction indiquée par l'angle θ , la largeur de C dans cette même direction vaut tout simplement $p(\theta) + p(\theta + \pi)$. On dira donc que C est de largeur constante 1 si et seulement si on a l'égalité $p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1$ dans toutes les directions possibles. Cette relation traduit également le roulement d'un orbiforme dans un carré comme le triangle de Reuleaux, c'est-à-dire en restant à chaque instant en contact avec les quatre côtés du carré. Intuitivement, il est donc assez clair que cette dernière propriété entraîne la stricte convexité d'un orbiforme (voir par exemple *Convex Figures* de Yaglom et Boltyanskii écrit en 1961). Si l'orbiforme avait une partie plate sur sa frontière, alors la forme sortirait du carré en tournant ! On a vu que la stricte convexité donnait de bonnes propriétés sur la fonction p . En fait on a mieux pour les orbiformes : la fonction d'appui p jouit d'une meilleure régularité, c'est une propriété non évidente qui a été obtenue notamment dans les travaux du mathématicien Ralph Howard.

Voyons maintenant comment ces considérations vont nous permettre de générer tous les orbiformes ! Lorsque l'on regarde un orbiforme C dans la direction indiquée par θ ou $\theta + 2\pi$, il est clair que la valeur de p est la même dans les deux directions. Ainsi, la fonction p est naturellement périodique de période 2π . La contrainte de largeur constante entraîne alors immédiatement que le développement en série de Fourier de p ne comporte pas d'harmoniques pairs sauf celui d'ordre 0 qui vaut $\frac{1}{2}$. On peut donc décomposer p sous la forme suivante : $p(\theta) = \frac{1}{2} + \sum [a_{2k+1} \cos(2k+1)\theta + b_{2k+1} \sin(2k+1)\theta]$. La donnée d'une telle fonction n'est cependant pas tout à fait suffisante pour définir la frontière d'un orbiforme. Il est nécessaire de rajouter une contrainte supplémentaire qui, intuitivement, dit que la concavité de la courbe ne change pas. En d'autres termes, cela revient à imposer que le rayon de courbure géométrique de C reste toujours positif. Toutefois, on gardera à l'esprit que si on fait abstraction de cette contrainte, les corps de largeur constante sont décrits de façon élémentaire par les fonctions 2π -périodiques avec coefficients impairs uniquement (à part le coefficient non nul d'ordre 0) ! On peut maintenant utiliser cette décomposition pour construire des orbiformes très simples, voir Figure 6. En particulier, on voit aisément de par l'expression de la fonction d'appui d'un orbiforme qu'une combinaison convexe⁷ de deux orbiformes C_1 et C_2 de largeur constante 1 (par exemple $\frac{C_1 + C_2}{2}$) reste un orbiforme de largeur constante 1. En particulier, si C'_1 est obtenu à partir de C_1 par rotation de 180° , alors $\frac{C_1 + C'_1}{2}$ est le disque de rayon $\frac{1}{2}$. Cette propriété propre aux orbiformes s'obtient tout simplement en notant que la fonction d'appui de C'_1 est obtenue à partir de celle de C_1 par translation de π de l'argument θ .

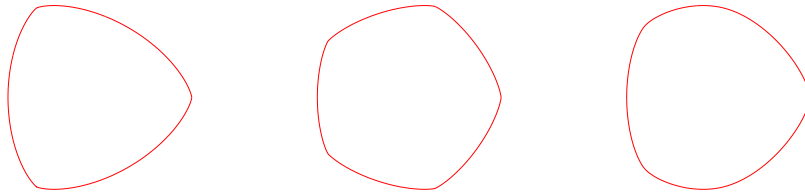


FIGURE 6 – Quelques courbes de largeur constantes générées avec des harmoniques de degré 3 et 5. Les trois ensembles sont décrits par les fonctions $p_3(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cos(3\theta)$, $p_5(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} \cos(5\theta)$ et $p(\theta) = \frac{1}{2}p_3(\theta) + \frac{1}{2}p_5(\theta)$. Contrairement aux polygones de Reuleaux ces courbes ne sont pas formées d'arcs de cercle et n'ont pas de points anguleux !

Si on s'intéresse maintenant de plus près à la sous-famille des courbes de largeur constantes générées à l'aide d'un nombre fini de coefficients de Fourier on obtient ce que l'on appelle les courbes algébriques⁸ de largeur constante. Chacune possède alors un unique polynôme P à deux indéterminées x, y qui annule la courbe et de degré minimal. On peut le calculer par des techniques usuelles d'élimination du paramètre (résultant ou base de Gröbner). La courbe de largeur constante algébrique décrite par la fonction p_3 (voir figure 6) possède la propriété suivante : son polynôme annulateur P est de degré 8. Parmi toutes les courbes algébriques non-circulaires de largeur constante, cette courbe a un polynôme P de degré minimal !

7. Lorsque l'on additionne deux convexes C_1 et C_2 on obtient un nouvel ensemble convexe obtenu comme l'ensemble des vecteurs $c_1 + c_2$ avec $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$. Cette somme d'ensembles convexes s'appelle *somme de Minkowski*.

8. On appelle courbe algébrique dans le plan un ensemble de points qui sont solutions d'une équation algébrique $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme à coefficients réels à deux indéterminées x et y .

Théorème de Blaschke-Lebesgue.

Périmètres et aires s'expriment facilement en termes de fonction d'appui. Le périmètre est linéaire en p : c'est l'intégrale de p sur la période, expression qui donne une preuve directe et élémentaire du Théorème de Barbier. L'aire vaut la moitié de l'intégrale du produit de p par son rayon de courbure sur la même période. Par le développement de p en série de Fourier, cette fonctionnelle à minimiser se trouve alors être quadratique strictement concave⁹ ! En optimisation, on aime en général minimiser des fonctions convexes pour lesquelles on sait à peu près tout faire : intuitivement un minimum se trouve alors dans le "creux" de la fonction. Néanmoins lorsque la fonction est concave, on a le résultat intuitif suivant : le minimum se trouve au "bord des contraintes". Plus précisément, le minimum se trouve être un point extrémal de cet ensemble (Théorème de Krein-Milman¹⁰). Cette propriété de concavité se retrouve également grâce au Théorème de Brunn-Minkowski qui affirme que la racine n -ième du volume (en dimension n) est une fonctionnelle concave.

Ces considérations nous permettent alors d'expliquer simplement le Théorème de Blaschke-Lebesgue. La concavité de la surface entraîne que le rayon de courbure d'un orbiforme d'aire minimale est "extrémal" au sens suivant : il prend la valeur 0 ou 1. Géométriquement, cela signifie exactement qu'un tel orbiforme est une intersection de disques de rayon 1. Rappelons que le disque de largeur 1 a lui un rayon de courbure constant qui vaut $\frac{1}{2}$, et il n'a rien d'extrémal ! A ce stade un objet de largeur constante de surface minimale est donc un polygone de Reuleaux dont la base n'est pas nécessairement un polygone régulier. Il suffit ensuite de montrer que les arcs de cercle ont effectivement tous la même longueur (c'est le maillon un peu plus délicat). Enfin, on vérifie aisément que le triangle de Reuleaux est d'aire minimale parmi tous les polygones de Reuleaux réguliers (la suite des aires de ces polygones est croissante par rapport au nombre de côtés, voir Figure 3). Ce schéma de preuve se retrouve dans plusieurs travaux autour du triangle de Reuleaux (Fujiwara, Harrell, Gandherari, Malagoli, Bayen) et s'avère le point de départ pour traiter des problèmes plus complexes. Cependant, on voit qu'il y a une difficulté dans ce problème liée en particulier à la concavité de la fonctionnelle à minimiser (celle-ci se retrouve d'ailleurs en dimension supérieure). La preuve originale de Blaschke et Lebesgue utilise des arguments plus géométriques (voir l'ouvrage de Bonnesen et Fenchel). Cela dit elle s'avère inefficace dans un contexte plus général ou bien en dimension supérieure. Firey a raffiné ce résultat en 1960 en montrant que les polygones de Reuleaux réguliers maximisent la surface dans la classe des polygones de Reuleaux non réguliers.

Orbiformes dans les polygones

Les courbes de largeur constante sont donc liées au carré par la propriété de roulement sans glissement à l'intérieur de celui-ci. Cette propriété est le point de départ pour généraliser les orbiformes au cas d'un polygone convexe. On appelle *rotor*¹¹ toute courbe fermée qui tourne dans un polygone convexe à n côtés en restant à chaque instant en contact avec les n côtés de celui-ci. Le roulement sans glissement impose ainsi une contrainte cinématique qui se traduit par le fait suivant : toutes les perpendiculaires aux n côtés en les n points de contact concourent à chaque instant au centre instantané de rotation du rotor ! Dans un triangle ayant pour angles α, β, γ cette remarque induit une relation immédiate entre les valeurs de p (où p est la fonction d'appui du rotor) dans les directions indiquées par les trois angles $\theta, \theta + \alpha$ et $\theta + \alpha + \beta$, relation du même type que celle que l'on a vue pour les orbiformes. En développant p en série de Fourier, on obtient alors le résultat de Lyusternik et Kamenetskii : il existe des rotors non-circulaires dans un polygone convexe donné si et seulement si ses angles sont commensurables avec π . Dans le cas du triangle, pour que de telles courbes existent, on doit donc avoir $\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}$ et $\frac{\gamma}{\pi}$ rationnels.

Les problèmes variationnels rencontrés pour les orbiformes se posent tout aussi naturellement dans le cas des rotors. On a tout d'abord l'équivalent du Théorème de Barbier, à savoir que tous les rotors d'un même polygone possèdent le même périmètre. Il semble par contre que le problème de minimisation de l'aire n'ait pas été étudié dans toute sa généralité mais seulement dans le cas des polygones réguliers (voir les travaux de Focke, Klötzler, et Bayen sur le sujet). De même que pour les orbiformes, le rotor d'aire minimale est extrémal en ce sens que son rayon de courbure sature les valeurs admissibles. De plus, comme le triangle de Reuleaux, le minimum est le rotor extrémal ayant un nombre minimal d'arcs de cercle avec le même secteur

9. Une fonction concave est l'opposée d'une fonction convexe : $y = x^2$ est convexe et $y = -x^2$ est concave.

10. Démontré dans les années 1940 par Krein et Milman, ce théorème affirme entre autres que tout polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets. Autrement dit les sommets jouent un rôle clef dans la définition de l'ensemble. La version en dimension finie de ce résultat est due à Minkowski.

11. Par analogie avec la rotation d'une hélice de bateau ou de certaines pièces mécaniques à mouvement rotatif, le terme rotor tire justement son nom de cette propriété. C'est Goldberg qui a introduit ce terme dans les années 1960 pour ces formes géométriques.

angulaire. Le rayon de courbure du minimum prend des valeurs quantifiées en fonction de n . Dans le cas du triangle équilatéral, le minimum est la lunule qui a une symétrie d'ordre 2 (voir Figure 7). Dans le cas d'un polygone régulier à n côtés, on constate le fait suivant que l'on vérifie aisément pour la lunule et le triangle de Reuleaux : dans la classe des rotors d'un polygone régulier à n côtés, le minimum global de l'aire est invariant par le groupe des isométries du plan conservant le polygone à $n - 1$ côtés (le groupe diédral d'ordre $n - 1$) ! Cette propriété de symétrie d'ordre $n - 1$ pour le minimum du problème "d'ordre n " est particulièrement remarquable.

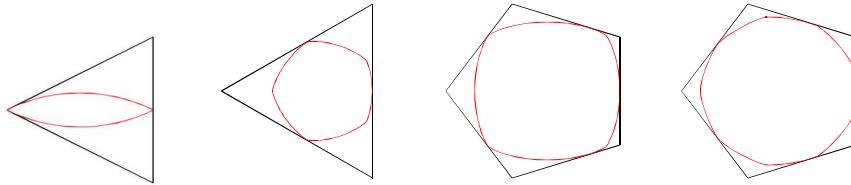


FIGURE 7 – Rotors dans le triangle et le pentagone. La lunule (tout à gauche) est d'aire minimale parmi les Δ -courbes (autre nom pour désigner les rotors liés au triangle équilatéral) et elle est composée de deux arcs de cercle. Le carré curviligne est d'aire minimale parmi les rotors du pentagone régulier.

Corps d'épaisseur constante.

Les problèmes vus en dimension 2 se posent tout naturellement en dimension supérieure et en particulier en dimension 3 où un corps d'épaisseur constante est aussi appelé *sphéroforme*. A l'aide des harmoniques sphériques (qui généralisent les séries de Fourier au cas de la sphère) on peut également construire toutes les sphéroformes de façon analogue au cas des orbiformes. Mais une façon plus naturelle d'en construire consiste en tout premier lieu à faire tourner un orbiforme symétrique autour de son axe de symétrie. On obtient ainsi un sphéroforme à symétrie de révolution (voir Figure 8 dans le cas d'un triangle de Reuleaux et d'un pentagone de Reuleaux tournés). Qu'en est-il maintenant de l'équivalent du triangle de Reuleaux en dimension

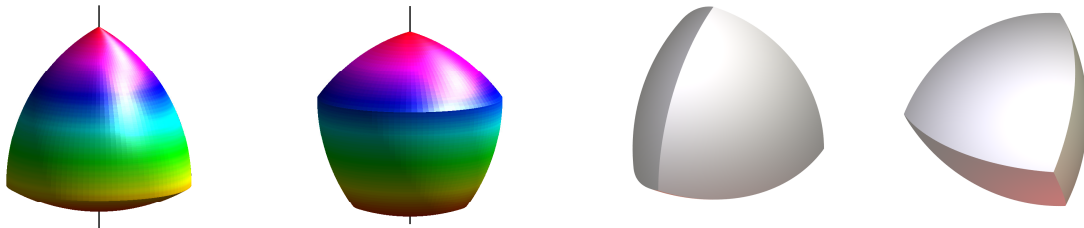


FIGURE 8 – Deux sphéroformes à symétrie de révolution : triangle de Reuleaux et pentagone de Reuleaux tournés autour d'un axe de symétrie. Deux vues du tétraèdre sphérique de Reuleaux (pas d'épaisseur constante).

3, à savoir du tétraèdre sphérique (voir Figure 8) obtenu en intersectant les quatre sphères centrées sur un tétraèdre régulier ? Bizarrement, cet objet convexe n'est pas de largeur constante. En effet, il possède six arêtes curvilignes et la distance qui sépare les deux milieux de deux arêtes opposées se trouve être strictement supérieure à 1 : pour une largeur de 1, celle-ci vaut en effet $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1.02 > 1$! On notera cependant que la distance entre l'une quelconque des quatre calottes sphériques et le sommet opposé vaut 1, donc cet objet a par construction une largeur constante dans bon nombre de directions de l'espace.

Dans les années 1911, Ernst Meissner¹² a introduit le corps convexe que l'on appelle *solide de Meissner*. Il est construit de la manière suivante : à partir du tétraèdre sphérique, on "rabote" là où c'est nécessaire pour

12. Ernst Meissner était un mathématicien suisse né en 1883 et mort en 1939. Il a eu le même professeur de Mathématiques qu'Albert Einstein (Heinrich Ganter). Il a d'abord travaillé sur des problèmes de mathématiques pures (géométrie, théorie des nombres) avant de s'intéresser à des problèmes plus appliqués et à la mécanique.

faire de ce convexe un sphéroforme. Plus précisément on intersecte ce solide avec toutes les sphères de rayon 1 centrées sur trois arêtes curvilignes (ceci pour forcer la largeur à valoir 1 dans les directions où la largeur est trop grande). Le sphéroforme de Meissner ne jouit d'aucune symétrie de révolution. Il n'a pas non plus toutes les symétries du tétraèdre régulier. La conjecture de Meissner¹³ est celle-ci : parmi les sphéroformes de largeur 1, le solide de Meissner est de volume minimal. Pour une largeur de 1, le volume de ce solide

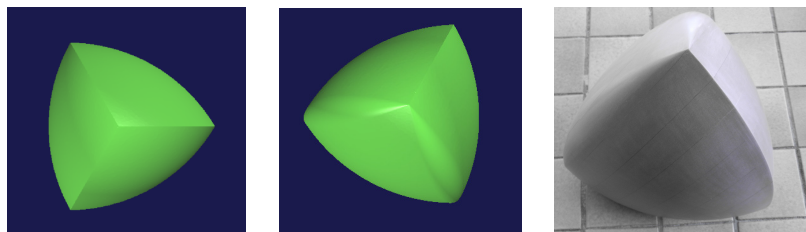


FIGURE 9 – Quelques vues du solide de Meissner. Son volume est d'environ 0.419 tandis que celui du triangle de Reuleaux tourné est supérieur et vaut environ 0.449. On voit nettement les arêtes curvilignes (non rabotées) et les arêtes rabotées (lisses). Sur la photo de droite il s'agit d'une réalisation d'un solide de Meissner obtenue par une imprimante tridimensionnelle à partir de l'enveloppe convexe d'un nuage de points. Plusieurs sphéroformes sont visibles au Palais de la Découverte dont le solide de Meissner.

est $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \arccos(\frac{1}{3}) \simeq 0.419$ tandis que le triangle de Reuleaux tourné a un volume plus grand qui vaut $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi^2}{6} \simeq 0.449$. Notons que dans la classe des corps de largeur constante à symétrie de révolution, celui de volume minimal est bien le triangle de Reuleaux tourné (conceptuellement ce problème est équivalent au cas des orbiformes). Récemment, à l'aide du paramétrage par fonction d'appui et de la concavité de la fonctionnelle de volume, il a été démontré par Bayen, Lachand-Robert et Oudet qu'un minimiseur n'est pas à frontière lisse. Il possède ce que l'on pourrait appeler des "arêtes curvilignes" : dans toute direction de l'espace, la zone d'appui dans cette direction ou bien la direction opposée n'est pas lisse. Cette condition est vérifiée par le solide de Meissner, mais il reste encore du chemin à parcourir pour arriver au résultat escompté. D'autres résultats récents confirment également la conjecture de Meissner.

Un résultat extraordinaire de Blaschke établit une relation affine simple entre le volume d'un sphéroforme C noté $\text{vol}(C)$ et son aire surfacique notée $\text{aire}(C)$. On a le théorème suivant : si C est un sphéroforme d'épaisseur 1, alors $\text{vol}(C) = \frac{1}{2}\text{aire}(C) - \frac{\pi}{3}$. Ce résultat montre en particulier que le problème de minimiser le volume ou l'aire surfacique sont équivalents, ce qui n'est absolument pas le cas en dimension 2 !

Evidemment, ces considérations dans le plan ou l'espace conduisent à de nombreux problèmes ouverts simples à poser. Il a été montré par Meissner qu'il existe l'équivalent de sphéroformes dans des polyèdres convexes pour trois des cinq solides de Platon¹⁴ : le tétraèdre, le cube, et l'octaèdre. La question suivante : "minimiser le volume dans la classe des sphéroformes associés au tétraèdre ou à l'octaèdre" semble donc ouverte tout comme le problème de Meissner. Mais, à l'inverse de la dimension 2, on ne sait toujours pas s'il existe des sphéroformes dans des polyèdres convexes non réguliers. De même, en dimension 2 on a vu le Théorème de Barbier sur les orbiformes, en dimension 3 on a vu le Théorème de Blaschke. Qu'en est-il alors en dimension supérieure ? Existe-t-il des propriétés analogues pour les corps de largeur constante en dimension $n \geq 4$? Cela s'avère autant de pistes à creuser à l'avenir pour mieux comprendre ces formes de largeur constante.

Pour en savoir plus :

- T. Bayen, J.-B. Hiriart-Urruty, *Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, 36, 1, pp. 17-42, 2012.
- M. Berger, *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà. De la puissance et de la complexité d'une notion simple*. Ellipses, 2006.
- T. Bonnesen et W. Fenchel, *Theory of convex bodies*. BCS Associates, 1987.
- I.M. Yaglom, V.G. Bontyanskii, *Convex Figures*. Holt. Rinehart and Winston, 1961.

13. Cette conjecture est attribuée à Meissner et est connue sous ce nom car il semble y avoir pensé dans ses travaux. C'est Bonnesen et Fenchel qui l'ont émise de façon définitive en 1934.

14. Les cinq solides de Platon sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.



FIGURE 10 – Jean-Baptiste Hiriart-Urruty avec un pizzaiolo de Hasparren (Pays basque) qui lui confectionne des pizzas de largeur constante.



FIGURE 11 – Tables en forme de triangle de Reuleaux au restaurant des frères Ibarboure à Bidart (Pays basque).