Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques Licence $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Equations Différentielles - Examen du 25 juin 2010 (2ème session)
Durée : 3 heures
Corrigé.

Exercice 1 On considère l'effectif d'une population $N = N(t)$ dont l'évolution temporelle est régie par

$$\begin{cases} N' = N\Big(1 - N^{2k+1}\Big) \\ N(0) = N_0 \end{cases}, \tag{1}$$

où $N_0 \geqslant 0$ est la population initiale et $k \geqslant 0$ est un entier naturel ; de plus on ne s'intéresse qu'aux temps $t \geqslant 0$.

(a) En énonçant très précisément les hypothèses du théorème employé montrez qu'il existe une unique solution locale à ce problème de Cauchy.

(1) est une équation différentielle du type $N' = f(t, N)$ avec

$$f(t, N) = N\Big(1 - N^{2k+1}\Big).$$

f ne dépend pas de t et est polynômiale en N, donc localement lipschitzienne en la deuxième variable : d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe donc une unique solution locale du problème de Cauchy (1).

(b) En étudiant le signe de $N(1 - N^{2k+1})$ montrez que si $N_0 \in]0, 1[$ alors $N(t) \in [N_0, 1[$ pour tout temps où cette solution est définie. De même, montrez que si $N_0 > 1$ alors $N(t) \in]1, N_0]$.

Indication : étudiez les points d'équilibre ainsi que la monotonie de $N(t)$.

Commme $f(t, 1) = f(t, 0) = 0$ on a deux solutions globales évidentes $N(t) = 1$ et $N(t) = 0$; d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz ces solutions consituent donc des barrières : une solution quelconque ne peut croiser ni la droite $N = 1$ ni la droite $N = 0$ (à moins bien sûr d'être une de ces deux solutions évidentes). Autrement dit si $N_0 > 1$ la solution de (1) issue de ce point reste « au dessus »$N(t) > 1$: d'où $N' = N(1 - N^{2k+1}) < 0$. Ainsi sur son intervalle d'existence $N(t) > 1$ est donc strictement décroissante et $N(0) = N_0 \geqslant N(t) < 1$. De même si $N_0 \in]0, 1[$ la solution reste « entre les deux »$0 < N(t) < 1$: d'où $N' = N(1 - N^{2k+1}) > 0$. Sur son intervalle d'existence N est donc strictement croissante et $N(0) = N_0 \leqslant N(t) < 1$.

(c) En déduire que si $N_0 \geqslant 0$ la solution est globale (définie sur $t \in \mathbb{R}^+$ tout entier).

Si $N_0 \geqslant 0$ alors $N(t)$ est bornée a priori sur son intervalle d'existence maximale (si $N_0 = 0$ $N(t) = 0$, si $N_0 \in]0, 1[$ $N(t) \in [N_0, 1[$, si $N_0 = 1$ $N(t) = 1$ et si $N_0 > 1$ $N(t) \in]1, N_0]$) : d'après le théorème de sortie des compacts $N(t)$ est donc globale.

(d) Montrez que si $N(t) \to N_\infty$ pour $t \to +\infty$ alors $N_\infty = 0$ ou $N_\infty = 1$. En déduire que si $N_0 > 0$ alors $N(t) \to 1$.

Supposons par l'absurde que $N(t) \to N_\infty \neq 0, 1$: alors

$$N'(t) = N(1 - N^{2k+1}) \to A := N_\infty(1 - N_\infty^{2k+1}) \neq 0.$$

Par comparaison des intégrales on a alors pour $t \to +\infty$

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0) + \int_0^t \underbrace{N'(s)}_{\sim A} \mathrm{d}s \\ &\sim At; \end{aligned}$$

d'où la contradiction.
Montrons que pour $N_0 > 0$ $N(t)$ a une limite N_∞ : pour $N_0 \in]0, 1[$ on a vu que $N(t) \in [N_0, 1[$ et $N' > 0$; N est ainsi une fonction croissante majorée et possède donc une limite finie $N_\infty \geqslant N_0 > 1$. De même pour $N_0 > 1$ $N(t) \in]1, N_0]$ et $N' < 0$; N est ainsi une fonction décroissante minorée et possède donc une limite finie $N_\infty \geqslant 1$. Enfin si $N_0 = 1$ alors $N(t) = 1 \to N_\infty = 1$. D'après ce qui précède les seules valeurs possibles pour N_∞ sont 0 ou 1 et comme içi $N_\infty > 0$ finalement

$$N(t) \to 1.$$

(e) Le point d'équilibre $N = 1$ est-il a priori stable, instable, neutre ?

La question précédente prouve exactement que le point d'équilibre $N = 1$ est stable au sens de la définition du cours :

$$\exists \varepsilon > 0 \; t.q \; \forall N_0, \; |N_0 - 1| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |N(t) - 1| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la solution issue de N_0 reste proche du point d'équilibre si N_0 est « assez proche »de 1.
On a même a priori la stabilité asymptotique, c'est-à-dire que non seulement $|N(t) - 1| \leqslant \varepsilon$ mais surtout $|N(t) - 1| \to 0$ d'après la question précédente. On pourrait le vérifier facilement en linéarisant (1) autour du point d'équilibre $N = 1$...

(f) On pose $k = 0$. Résoudre le problème du Cauchy (1). Retrouvez le résultat de (c) par le calcul.

Pour $N_0 > 0$ on a vu que $N(t) > 0$: on peut donc poser $y(t) = \frac{1}{N(t)}$; un calcul élémentaire montre que pour $k = 0$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{N'}{N^2} \\ &= -\frac{N(1-N)}{N^2} \\ &= -\left(\frac{1}{N} - 1\right) \\ &= -y + 1. \end{aligned}$$

et $y(0) = y_0 := \frac{1}{N_0}$. On résoud cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 comme

$$y(t) = \lambda y_h(t) + y_p(t) = \lambda e^{-t} + 1,$$

et la condition initiale donne $y_0 = \lambda + 1$, soit finalement

$$y(t) = 1 + (y_0 - 1)e^{-t} \Leftrightarrow N(t) = \frac{N_0}{N_0 + (1 - N_0)e^{-t}}.$$

On retrouve bien le résultat de la question [c], mais aussi ceux des questions [d] et [e] ! ! !
Pour calculer explicitement $N(t)$ on aurait aussi pu résoudre par séparation des variables $\frac{N'}{N(1-N)} = 1$ et décomposer $\frac{1}{N(1-N)}$ en fractions rationnelles.

Exercice 2 Soit $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dépendant continûment de $t \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire non-autonome

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}, \tag{2}$$

où $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) On suppose que X_0 est un vecteur propre de $A(t)$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$, $A(t)X_0 = \lambda(t)X_0$. Résoudre le problème de Cauchy (2). Justifiez !

On cherche une solution de la forme $X(t) = x(t)X_0$ où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer telle que $x(t_0) = 1$; en injectant dans (2) on obtient

$$\begin{aligned} x'(t)X_0 &= X'(t) \\ &= A(t)X(t) \\ &= x(t)A(t)X_0 \\ &= x(t)\lambda(t)X_0 \end{aligned}$$

et donc

$$x'(t) = \lambda(t)x(t) \tag{3}$$

(sauf si $X_0 = 0$, ce qui est un cas trivial puisqu'alors $X(t) = 0$). Cette équation différentielle scalaire se résout facilement en

$$x(t) = e^{\Lambda(t)}$$

où $\Lambda(t)$ est la primitive de λ telle que $\Lambda(t_0) = 0$, et finalement

$$X(t) = e^{\Lambda(t)}X_0.$$

Réciproquement, supposons que la trajectoire de $X(t)$ issue de X_0 est le long d'une droite : on peut donc poser

$$X(t) = x(t)X_0, t \in \Delta \tag{4}$$

où Δ est l'intervalle de définition de $X(t)$ et $x(t)$ est à valeurs réelles.

(b) En utilisant (4) montrer que X_0 est un vecteur propre de $A(t)$ pour tout $t \in \Delta$.

En dérivant (4) on obtient

$$x'(t)X_0 = A(t)X(t) = x(t)A(t)X_0;$$

de plus d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz si $X(t)$ s'anulle à un certain temps alors $X(t)$ est identiquement nul : on peut ainsi supposer $x(t) \neq 0$ et donc

$$A(t)X_0 = \frac{x'(t)}{x(t)}X_0,$$

c'est-à-dire par définition que X_0 est un vecteur propre de $A(t)$.

(c) Soit $\lambda(t) = \frac{\langle A(t)X_0, X_0\rangle}{||X_0||^2}$ où $\langle ., .\rangle$ et $||.||$ désignent le produit scalaire et la norme euclidiens, et X_0 est défini par (4). Montrer que $x' = \lambda(t)x$ et calculez explicitement $x(t)$.

On fait le produit scalaire de l'équation ci-desssus avec X_0 :

$$\langle A(t)X_0, X_0\rangle = \frac{x'(t)}{x(t)}||X_0||^2,$$

et comme on a supposé $x(t) \neq 0$ on obtient

$$x' = \lambda(t)x.$$

Comme on a de plus la condition initiale $X(t_0) = X_0 \Leftrightarrow x(t_0) = 1$ on résout finalement

$$x(t) = e^{\Lambda(t)},$$

où $\Lambda(t)$ est la primitive de λ telle que $\Lambda(t_0) = 0$.
On retrouve bien sûr $x(t) \neq 0$.

(d) On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(t) & \cos^2(t) \\ \cos^2(t) & \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Calculer les solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ dont les trajectoires sont le long d'une droite.

D'après ce qui précède il faut trouver les vecteurs propres constants de $A(t)$; on trouve deux valeurs propres associés à deux vecteurs propres en lisant directement sur la matrice ($c_1 + c_2$ et $c_1 - c_2$)

$$\begin{array}{ll} \lambda_1(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 & X_1 = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \\ \lambda_2(t) = \sin^2(t) - \cos^2(t) = -\cos(2t) & X_2 = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \end{array}$$

On calcule ensuite $\Lambda_1(t) = (t - t_0)$ et $\Lambda_2(t) = \frac{\sin(2t_0)-\sin(2t)}{2}$ et les solutions qui sont des droites sont toutes de la forme

$$X(t) = A_1 e^{t-t_0}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2})$$

ou

$$X(t) = A_2 e^{\frac{\sin(2t_0)-\sin(2t)}{2}}(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}),$$

avec A_1 et A_2 des constantes à ajuster en fonction de la condition initiale $X(t_0) = X_0$.