Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques Licence $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Equations Différentielles - Examen du 25 juin 2010 (2ème session)

Durée : 3 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Exercice 1 On considère l'effectif d'une population $N = N(t)$ dont l'évolution temporelle est régie par

$$\left\{ \begin{array}{l} N' = N\Big(1 - N^{2k+1}\Big) \\ N(0) = N_0 \end{array} \right. , \tag{1}$$

où $N_0 \geqslant 0$ est la population initiale et $k \geqslant 0$ est un entier naturel ; de plus on ne s'intéresse qu'aux temps $t \geqslant 0$.

(a) En énonçant très précisément les hypothèses du théorème employé montrez qu'il existe une unique solution locale à ce problème de Cauchy.

(b) En étudiant le signe de $N(1 - N^{2k+1})$ montrez que si $N_0 \in]0,1[$ alors $N(t) \in [N_0, 1[$ pour tout temps où cette solution est définie. De même, montrez que si $N_0 > 1$ alors $N(t) \in]1, N_0]$.
Indication : étudiez les points d'équilibre ainsi que la monotonie de $N(t)$.

(c) En déduire que si $N_0 \geqslant 0$ la solution est globale (définie sur $t \in \mathbb{R}^+$ tout entier).

(d) Montrez que si $N(t) \to N_\infty$ pour $t \to +\infty$ alors $N_\infty = 0$ ou $N_\infty = 1$. En déduire que si $N_0 > 0$ alors $N(t) \to 1$.

(e) Le point d'équilibre $N = 1$ est-il a priori stable, instable, neutre ?

(f) On pose $k = 0$. Résoudre le problème du Cauchy (1). Retrouvez le résultat de (c) par le calcul.

Exercice 2 Soit $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dépendant continûment de $t \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire non-autonome

$$\left\{ \begin{array}{l} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. , \tag{2}$$

où $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) On suppose que X_0 est un vecteur propre de $A(t)$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$, $A(t)X_0 = \lambda(t)X_0$. Résoudre le problème de Cauchy (2). Justifiez !

Réciproquement, supposons que la trajectoire de $X(t)$ issue de X_0 est le long d'une droite : on peut donc poser

$$X(t) = x(t)X_0, t \in \Delta \tag{3}$$

où Δ est l'intervalle de définition de $X(t)$ et $x(t)$ est à valeurs réelles.

(b) En utilisant (3) montrer que X_0 est un vecteur propre de $A(t)$ pour tout $t \in \Delta$.

(c) Soit $\lambda(t) = \frac{\langle A(t)X_0, X_0\rangle}{||X_0||^2}$ où $\langle ., . \rangle$ et $||.||$ désignent le produit scalaire et la norme euclidiens, et X_0 est défini par (3). Montrer que $x' = \lambda(t)x$ et calculez explicitement $x(t)$.

(d) On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(t) & \cos^2(t) \\ \cos^2(t) & \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Calculer les solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ dont les trajectoires sont le long d'une droite.