Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques Licence $3^{ème}$ année, Mathématiques Fondamentales

Equations Différentielles - Examen du 11 mai 2010
Durée : 3 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Exercice 1 On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y \end{cases} \tag{1}$$

(a) Exprimer la solution de condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ à l'aide des valeurs et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $T(x_0, y_0)$ la trajectoire, dans l'espace des phases, du point $M(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \geqslant 0$ avec la condition initiale $M(0) = (x_0, y_0)$.

(b) Pour quelles positions de $M(0)$ cette trajectoire est-elle une demie-droite ?

(c) Pour quelles positions de $M(0)$ tend elle vers 0 quand $t \mapsto +\infty$?

(d) Indiquer sur une même figure la forme des trajectoires de (1) (le portrait de phase). La solution nulle est-elle stable ? Justifier la réponse.

Exercice 2

(a) Montrer qu'en coordonnées polaires $x = \rho \sin\varphi, y = \rho\cos\varphi,\ \rho > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$ le champ associé au système

$$x' = y, y' = -x$$

est redressé. Ecrire l'équation associée. Peut-on redresser le champ au voisinage de l'origine $x = 0, y = 0$?

(b) Calculer un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui redresse le champs associé au système

$$x' = 1, y' = sin(x).$$

Exercice 3 On considère le système différentiel

$$X' = A(t)X \tag{2}$$

où $A \in \mathcal{M}_n$ est une matrice $n \times n$ dont les coefficients sont différentiables et périodiques de période ω sur $\mathbb{R}$. Soit $U_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (le flot du système) l'application qui à $X_0 \in \mathbb{R}^2$ associe la position à l'instant s de la solution $X(t)$ de (E) vérifiant $X(0) = X_0$.

(a) Montrer que U_s est une application linéaire bijective.
On notera $V = U_\omega$. Les valeurs propres de V sont les multiplicateurs caractéristiques de (2).

(b) Montrer que (2) admet une solution ω-périodique non identiquement nulle si et seulement si 1 est multiplicateur caractéristique de (2).

(c) Soit $M(t)$, $M(0) = I$ une matrice fondamentale de (2). Montrer que $M(s)$ est la matrice representative de l'endomorphisme U_s dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(d) Montrer, en utilisant le Théorème de Liouville, que

$$\det M(t) = e^{\int_0^t Trace(A(s))ds}$$

Exercice 4 Soient $a_1(t), a_2(t)$ deux fonctions continues ω-périodiques sur $\mathbb{R}$, φ_1, φ_2 les solutions de l'équation

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{3}$$

telles que

$$\varphi_1(0) = 1, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 1.$$

Ecrire l'équation (3) en forme de système et montrer que les multiplicateurs caractéristiques satisfont l'équation

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0, \text{ où } A = \varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega), B = e^{-\int_0^\omega a_1(t)dt}$$