Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques
Année 2009-2010, Licence 3ème année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen du 23 Juin 2010, 13h30 à 16h30, salle B08, deuxième session
Durée : 3 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Énoncer la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d \leqslant n$ et de classe C^k.

Exercice 1 Soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme

$$E \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x|$$

et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Psi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) \end{array}$$

où

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f^2(s)\, ds, \Psi(f)(x) = \sin(f(x)) .$$

Rappelons que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et que tout sous-ensemble B de E est un espace métrique complet. Expliquer pourquoi $\Phi(f), \Psi(f) \in E$.

(a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x+y) - \sin(x) - y\cos(x)| \leqslant y^2.$$

(b) Montrer que Ψ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Psi(f)$ pour f dans E.

(c) Montrer que Φ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Phi(f)$ pour f dans E.

(d) Déterminer la différentielle d'ordre k $D^k\Phi(f)$ pour f dans E et $k \geqslant 2$.

(e) Déterminer la différentielle $D(\Phi \circ \Psi)(f)$ pour f dans E.

Exercice 2

(a) Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Dire si l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$$

est une submersion en (x_0, y_0, z_0). Justifier la réponse.

(b) Montrer que l'ensemble $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux. Dessiner S^2.

(c) Déterminer les points de la surface S^2 vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2x$.

(d) En déduire la valeur minimale et maximale de la restriction de $h(x,y,z)$ à S^2.

(e) Soit R une constante réelle. Montrer que si $R > -1$, l'ensemble

$$C_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x = R\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux (une surface). Dessiner C_R.

(f) Montrer que si $R > -1$ et $R \neq 0,8$, l'ensemble $S^2 \cap C_R \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension un (une courbe).